

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)  
(Đề thi có 01 trang; gồm 05 câu)

**Bài 1.** (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left( \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1}. \text{ với } x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$$

2. Cho ba số  $x, y, z$  khác 0 và thỏa mãn:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$

Tính giá trị biểu thức  $P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023})$

**Bài 2.** (4,0 điểm)

1. Giải phương trình  $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40$

2. Tìm  $x$  và  $y$  thỏa mãn đồng thời cả hai hệ thức sau:

$$x^3 + y^3 = 9 \quad (1) \text{ và } x^2 + 2y^2 = x + 4y \quad (2)$$

**Bài 3.** (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương:  $x^2 + y^2 = 3 - xy$ .

2. Cho  $x, y$  là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức  $3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1)$

Chứng minh rằng  $x^2 - y^2$  chia hết cho 40

**Bài 4.** (6,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Bx vuông góc với AB tại B. Trên tia Bx lấy điểm C (C khác B).

Kẻ BH vuông góc với AC (điểm H thuộc AC). Gọi M là trung điểm của AB.

1. Chứng minh rằng:  $HA \cdot HC = HB^2$

2. Kẻ HD vuông góc với BC (D thuộc BC). Gọi I là giao điểm của AD và BH. Chứng minh rằng ba điểm C, I, M thẳng hàng.

3. Giả sử AB cố định, điểm C thay đổi trên tia Bx. Biết  $\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1$

Tìm vị trí của điểm C trên tia Bx sao cho diện tích tam giác ABI lớn nhất.

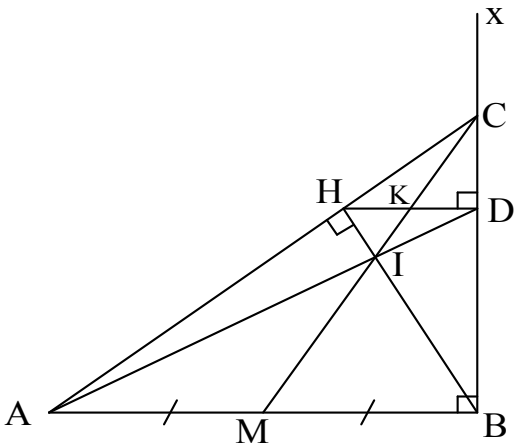
**Bài 5.** (2,0 điểm) Cho các số  $a, b, c$  không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$

.....Hết.....

## HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
1	<p>1. - Với <math>x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}</math>, biểu thức A xác định nên ta có :</p> $A = \left( \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \left( \frac{x(2x^2 + x - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x(x+1)}{(x^2 + x + 1)} - \frac{x}{(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ <p style="text-align: center;">Vậy : <math>A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}</math> ( với <math>x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}</math> )</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>2. Ta có: <math>\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (yz + xz + xy)(x+y+z) = xyz</math></p> $\Leftrightarrow xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + y^2x + z^2y + z^2x + xyz = xyz$ $\Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + 2xyz = 0$ $\Leftrightarrow (x+y)(x+z)(y+z) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} = -y^{2023} \\ y^{2023} = -z^{2023} \\ z^{2023} = -x^{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} + y^{2023} = 0 \\ y^{2023} + z^{2023} = 0 \\ z^{2023} + x^{2023} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023}) = 0.$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
2	<p>1. ĐKXD: <math>x \neq 3</math>.</p> $x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 40 \Leftrightarrow \left( x + \frac{3x}{x-3} \right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{x^2}{x-3} \right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$ <p>Đặt <math>t = \frac{x^2}{x-3}</math> ta có phương trình <math>t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -4 \end{cases}</math></p> <p><math>t = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0</math> vô nghiệm;</p> <p><math>t = -4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}</math></p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>

	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 2\}$	0,25
	2. Nhân hai vế phương trình (2) với 3, ta được $3x^2 + 6y^2 = 3x + 12y$ (3). Trừ hai phương trình (1) và (3) vế theo vế, ta được: $(x-1)^3 = (2-y)^3 \Leftrightarrow y = 3-x$ . Thế $y = 3-x$ vào (3), ta được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ . Với $x = 1$ thì $y = 2$ . Với $x = 2$ thì $y = 1$ . Vậy $(x; y) = (2; 1), (1; 2)$ .	0,5 0,5 0,5 0,5
3	1. Ta có: $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3-xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$ Mà $x, y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 0 < xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = y = 1$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x, y) = (1; 1)$	0,75 0,75 0,5
	2. Ta có $3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1$ (*) Th1: Trước hết ta chứng minh $x^2 - y^2 : 8$ Ta có : $\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 4 \pmod{8} \\ 2y^2 \equiv 0; 2 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 6; 3; 1; 4; 2 \pmod{8}$ Do đó từ (*) ta có : $3x^2 - 2y^2 = 1 \pmod{8} \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow (x^2 - y^2) : 8(1)$ Th2: Chứng minh $x^2 - y^2 : 5$ Ta có $\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 2 \pmod{5} \\ 2y^2 \equiv 0; 2; 3 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 3; 2; 1; 4 \pmod{5}$ Do đó từ (*) ta có : $3x^2 - 2y^2 = 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{5}$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 : 5(2)$ Từ (1) và (2) kết hợp với $(5; 8) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 : 40 \Rightarrow d_{fcm}$	0,5 0,5
4		
	1. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHC$ có: +) $\widehat{AHB} = \widehat{BHC}$ (do $BH \perp AC$ ) +) $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ với $\widehat{HBA}$ ) $\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BHC$ (g.g)	2,0

	$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HA.HC = HB^2$	
	<p>2. Giả sử đường thẳng CI cắt HD và AB lần lượt tại các điểm K và M'</p> <p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: CAM', CM'B với HD // AB, ta có:</p> $\frac{HK}{AM'} = \frac{CK}{CM'}, \frac{KD}{BM'} = \frac{CK}{CM'} \Rightarrow \frac{HK}{AM'} = \frac{KD}{BM'} \quad (1)$ <p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: IAM', IM'B với HD // AB, ta có:</p> $\frac{HK}{M'B} = \frac{KI}{IM'}, \frac{KD}{AM'} = \frac{KI}{IM'} \Rightarrow \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{AM'} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra:</p> $\frac{HK}{AM'} : \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{M'B} : \frac{KD}{AM'} \Rightarrow \frac{M'B}{AM'} = \frac{AM'}{M'B} \Rightarrow AM'^2 = M'B^2 \Rightarrow AM' = BM'$ <p><math>\Rightarrow M'</math> là trung điểm của AB. Mà M cũng là trung điểm của AB (gt)  <math>\Rightarrow M'</math> trùng với M. Vậy 3 điểm C, I, M thẳng hàng</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>3. Ta có: <math>\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{IC} = \frac{HA.BM}{CH.AB} = \frac{HA.AB}{2CH.AB} = \frac{HA}{2CH}</math></p> $= \frac{HACH}{2CH^2} = \frac{HB^2}{2CH^2} \quad (1) \quad (\text{Vi: } BM = \frac{AB}{2}; \text{ Theo câu a: } HACH = HB^2)$ <p>Mà <math>\triangle AHB \sim \triangle BHC</math> nên <math>\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC} \quad (2)</math></p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>\frac{MI}{IC} = \frac{AB^2}{2BC^2} = \frac{a^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}</math></p> <p>Suy ra <math>\frac{S_{IAB}}{S_{CAB}} = \frac{IM}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}</math>. Mà <math>S_{CAB} = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{ax}{2}</math></p> $\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 x}{a^2 + 2x^2} = \frac{a^3}{2 \left( \frac{a^2}{x} + 2x \right)} \leq \frac{a^3}{4 \sqrt{\frac{a^2}{x} \cdot 2x}} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}a} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$ <p>Dấu „=” xảy ra khi: <math>\frac{a^2}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}</math></p> <p>Vậy Khi C trên tia Bx sao cho <math>BC = \frac{a}{\sqrt{2}}</math> thì giá trị lớn nhất của <math>S_{IAB} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}</math></p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
5	<p>Với các số <math>a, b, c</math> không âm thỏa mãn <math>a + b + c = 3</math>. Ta có :</p> <p>*) <math>(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a \left( a^2 - 3a + \frac{9}{4} \right) + \frac{3a}{4} - 1 = a \left( a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3a}{4} - 1 \geq \frac{3a}{4} - 1 \quad (1)</math></p> <p>*) <math>(b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = b \left( b^2 - 3b + \frac{9}{4} \right) + \frac{3b}{4} - 1 = b \left( b - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3b}{4} - 1 \geq \frac{3b}{4} - 1 \quad (2)</math></p> <p>*) <math>(c-1)^3 = c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = c \left( c^2 - 3c + \frac{9}{4} \right) + \frac{3c}{4} - 1 = c \left( c - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3c}{4} - 1 \geq \frac{3c}{4} - 1 \quad (3)</math></p> <p>Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được :</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>

	$(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3 \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - 3 = \frac{3}{4} \cdot 3 - 4 = -\frac{3}{4} \Rightarrow P \geq -\frac{3}{4}$	0,5
	<p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :</p> $\begin{cases} a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b;c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c) = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \end{cases}$	0,5
	<p>Vậy <math>\text{Min } P = -\frac{3}{4}</math> khi <math>(a;b;c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)</math> và các hoán vị của nó</p>	0,25