

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : TOÁN (chuyên)

Thời gian : 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Bài 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-x} \right)$ và biểu thức

$$Q = \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \text{ với } x > 0, y > 0 \text{ và } x \neq y. \text{ Rút gọn các biểu thức } P, Q \text{ và}$$

chứng minh rằng với các số x, y dương phân biệt tùy ý thì $4Q+1 > 2P$.

Bài 2. (1,5 điểm) Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 5$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A và B . Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục Ox .

a) Khi $k = -4$, tính diện tích hình thang $ABDC$.

b) Tìm tất cả các giá trị của k để AD và BC cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn đường kính CD .

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $10x^2 + 3x + 2 = (6x+1)\sqrt{x^2+2}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2-y)\sqrt{x-2} = x(y-x+2) \\ (y-1)(y-3x-3) = x^2-3x+3-8\sqrt{x-2}. \end{cases}$$

Bài 4. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC , với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở D . Đường tròn đường kính AD cắt đường tròn đường kính OD tại điểm E (khác D). Gọi F là giao điểm của đoạn thẳng OE và đường tròn (O) .

a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, E thẳng hàng và CF là tia phân giác của góc BCE .

b) Các tia AB, AC lần lượt cắt đường tròn đường kính AD tại các điểm G, K (đều khác A). Chứng minh rằng OD đi qua trung điểm của đoạn thẳng GK .

Bài 5. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC < BC$, đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB tại M . Lấy điểm E nằm giữa A và M . Trên cạnh AC, BC lần lượt lấy các điểm D, F sao cho $AD = AE$ và $BF = BE$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF lần lượt cắt AB và BC tại G (khác E) và H (khác F). Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF và các đường thẳng CM, ED, GH đồng quy.

Bài 6. (1,5 điểm)

a) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$2008(x^2 + y^2 + z^2) + 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2023(x + y + z).$$

b) Cho phương trình $x^2 - 4mn^2x - 4mn^3 - m = 0$, với m và n là các tham số. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(m; n)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều là số nguyên và $x_1 + x_2 + 1$ là số nguyên tố.