

Đề chính thức

Môn thi chuyên: TOÁN (CHUYÊN TOÁN - TIN)

Ngày thi: 06/6/2023

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1: (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức $T = \sqrt{x} \left(\frac{x+3\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-8} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right); x > 0, x \neq 4.$

a) Rút gọn biểu thức T .

b) Chứng minh rằng $T < \frac{1}{6}$.

2. Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(m-1)x - 2m = 0$ (m là tham số). Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m . Tìm các giá trị của m để hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $|x_1 + 1| = |x_2 + 1|$.

Bài 2: (2,5 điểm)

1. Giải phương trình $2\sqrt{x-1} - 3\sqrt{x+1} = 6 - \sqrt{x^2-1}, x \in \mathbb{R}.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=-3 \\ 2x^2y-3x+2xy^2-3y=7 \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}.$

Bài 3: (1,0 điểm)

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 5$.

Bài 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB > AC$. Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P , đường thẳng AP cắt đường tròn (O) tại Q (khác A). Gọi M là trung điểm BC . Kẻ đường cao AH của tam giác ABC .

1. Chứng minh tứ giác $BOCP$ nội tiếp và $\widehat{HAB} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

2. Chứng minh $\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ và $\frac{QB}{MC} = \frac{AB}{AM}$.

3. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên BC, CA, AB . Chứng minh rằng D là trung điểm EF .

Bài 5: (1,0 điểm)

Cho hình vuông có cạnh bằng 20. Bên trong hình vuông này chọn 2023 điểm phân biệt (không nằm trên các cạnh của hình vuông). Xét tập hợp A có 2027 điểm gồm 4 đỉnh của hình vuông và 2023 điểm đã chọn. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có 3 đỉnh thuộc A với diện tích nhỏ hơn $\frac{1}{10}$.

----- HẾT -----