

ĐỀ THI HSG HUYỆN NĂM 2022 – 2023

NGÀY THI: 14/1/2023

Câu I. (5điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+9}{x-9} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

a. Rút gọn biểu thức A.

b. Tìm x sao cho $A < -1$

2. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tính giá trị biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + \frac{1}{xz} \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Câu II. (5 điểm):

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a. $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

b. $\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$

2. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = kx + 1$ (k là tham số). Tìm k để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$.

Câu III. (5 điểm): Cho đường tròn (O;R) và điểm K cố định nằm ngoài đường tròn. Qua K kẻ hai tiếp tuyến KM, KN tới đường tròn (M,N là các tiếp điểm) Một đường thẳng đi qua K cắt đường tròn (O;R) tại hai điểm B và C ($KB < KC$). Gọi I là trung điểm của BC.

a. Chứng minh K, M, N, O, I cùng nằm trên một đường tròn và $KM^2 = KB.KC$

b. Đường thẳng qua B // KM cắt MN tại E. chứng minh $EI \parallel CM$.

c. Chứng minh khi d thay đổi quanh điểm K thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Câu IV. (2 điểm): cho các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{3}{4}$. Tính diện tích hình vuông ABCD, biết diện tích tứ giác MNPQ = 25cm^2 .

Câu V. (3 điểm):

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2 + 7b^2 + 16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16bc}} + \frac{c^2(3+a)}{a}$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình

$$(x-y-1)(x+1-y) + 6xy + y^2(2-x-y) = 2(x+1)(y+1)$$

ĐÁP ÁN

CÂU I.

1. a. ĐK: $0 < x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x+9}{x-9} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{x-3\sqrt{x}-x-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{3\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2\sqrt{x}+4} \\ &= \frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} \end{aligned}$$

b. Để $A < -1$ thì $\frac{-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4} < -1 \Leftrightarrow -3\sqrt{x} < -2\sqrt{x}-4 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16$

2. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ vì $x, y, z > 0$ nên $a, b, c > 0$

Ta có: $x + y + z = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1 \Leftrightarrow bc + ac + ab = 1$

Ta lại có: $a^2 + 1 = a^2 + bc + ac + ab = (a+b)(a+c) = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}$

$$\Leftrightarrow x^2(a+b)(a+c) = x^2 + 1$$

Tương tự ta có: $1 + y^2 = y^2(b+c)(a+b)$

$$1 + z^2 = z^2(a+c)(b+c)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} &= \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{y^2(b+c)(a+b) + z^2(b+c)(a+c)}{x^2(a+b)(a+c)}} \\ &= \frac{b+c}{x} = \frac{y+z}{xyz} \quad (\text{do } b, c, x > 0) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{xz} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}} = \frac{x+z}{xyz} \quad (\text{do } a, c, y > 0)$$

$$\frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = \frac{x+y}{xyz} \quad (\text{do } a, b, z > 0)$$

$$\text{Vậy: } Q = \frac{y+z}{xyz} + \frac{x+z}{xyz} + \frac{x+y}{xyz} = 2$$

Câu II. 1. Giải các phương trình và hệ phương trình sau.

a. $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$, ĐK: $-1 \leq x < 0$

Chia cả hai vế của pt cho x ta được: $x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x}$

Đặt: $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = a, (a \geq 0)$

PTTT: $a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1(n) \\ a = -3(l) \end{cases}$

Với $a = 1$ ta có $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (l) \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} (n) \end{cases}$

Vậy pt có nghiệm $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

b. $\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2xy(y-x) + 7(x-y) + (x-y)(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x+y-2xy+7 = 0 \end{cases}$$

* $x = y$ thay vào hệ ta được: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = y = 2$ hoặc $x = y = 3$

* $x + y - 2xy + 7 = 0$ (1)

Mặt khác, khi cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0$$
 (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - 2xy + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0 \end{cases}$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$ ta có hệ:

$$\begin{cases} S - 2P + 7 = 0 \\ S^2 - 5S - 2P + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{S+7}{2} \\ S^2 - 6S + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$$

Với $S = 1$, $P = 4$ hệ vô nghiệm.

Với $S = 5$, $P = 6$ ta có $(x;y) = (2;3), (3;2)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (2;2), (3;3), (2;3), (3;2)$

2. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = kx + 1$ (k là tham số). Tìm k để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - kx - 1 = 0$ (*)

Có $\Delta = k^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ PT (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 + 4}}{2} + 1$$

$$x_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{k^2 - k\sqrt{k^2 + 4}}{2} + 1$$

Suy ra tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$

Mặt khác: $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2\sqrt{10}$

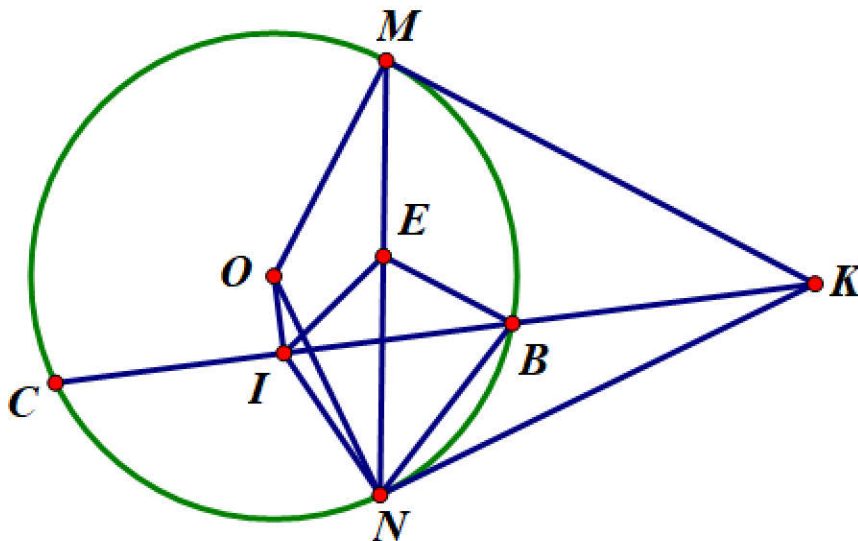
$$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4 + k^2(k^2 + 4)} = 2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow k^4 + 5k^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 = 4(n) \Rightarrow k = \pm 2 \\ k^2 = -9(l) \end{cases}$$

Vậy $k=2$, $k = -2$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thỏa $MN = 2\sqrt{10}$

Câu III. (5 điểm): Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm K cố định nằm ngoài đường tròn. Qua K kẻ hai tiếp tuyến KM, KN tới đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua K cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm B và C ($KB < KC$). Gọi I là trung điểm của BC.

- Chứng minh K, M, N, O, I cùng nằm trên một đường tròn và $KM^2 = KB \cdot KC$
- Đường thẳng qua B // KM cắt MN tại E. chứng minh $EI \parallel CM$.
- Chứng minh khi d thay đổi quanh điểm K thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm trên một đường tròn cố định.



a) Chứng minh K, M, N, O, I cùng nằm trên một đường tròn và $KM^2 = KB \cdot KC$

- Ta có: $\widehat{MNO} = \widehat{KNO} = \widehat{KIO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ Các tứ giác KMON, KMOI nội tiếp đường tròn đường kính OK
 $\Rightarrow$ Năm điểm K, M, O, I, N cùng nằm trên đường tròn đường kính OK
- Ta lại có: $\triangle KMB \sim \triangle KCM$ ($\widehat{KMB} = \widehat{KCM}$, $\widehat{K}$ chung)

$$\Rightarrow KM^2 = KB.KC$$

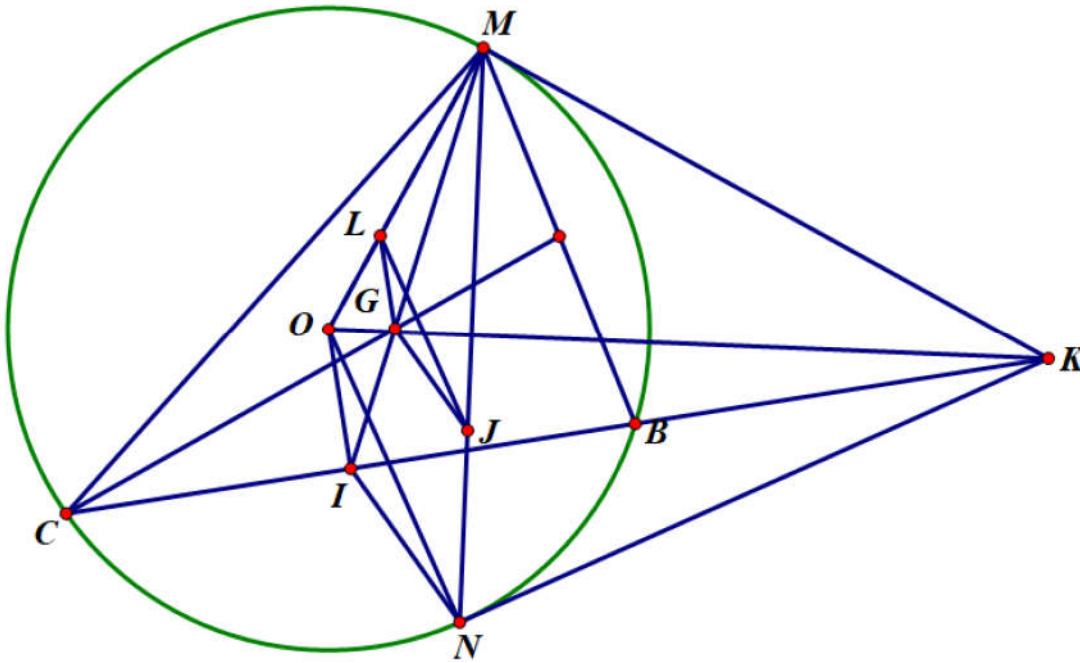
b. Đường thẳng qua B // KM cắt MN tại E. chứng minh EI // CM

Xét tứ giác NIEB có $\widehat{NIB} = \widehat{NMK} = \widehat{NEB}$

$\Rightarrow$ Tứ giác NIEB nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IEN} = \widehat{IBN} = \widehat{CMN}$$

$\Rightarrow IE \parallel CM$



c. Chứng minh khi d thay đổi quanh điểm K thì trọng tâm G của tam giác MBC luôn nằm trên một đường tròn cố định.

CM: Trên OM lấy điểm L, MN lấy điểm J sao cho $ML = \frac{2}{3}OM, MJ = \frac{2}{3}MN$

Ta có $MG = \frac{2}{3}MI$ suy ra: $LG \parallel OI, GJ \parallel IN$ (theo định lý Ta lét đảo)

Suy ra: $\widehat{LGM} = \widehat{OIM}, \widehat{GJM} = \widehat{INM}$

Mà: $\widehat{OIM} = \widehat{INM}$ (cùng chắn cung OM)

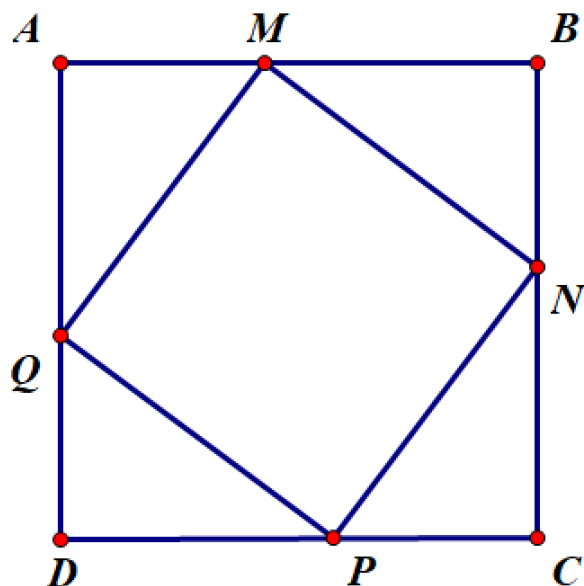
Nên: $\widehat{LGM} = \widehat{GJM}$

Suy ra: Tứ giác MLGJ nội tiếp

Mặt khác: Do điểm O, M, N nên điểm L, J cố định

Vậy khi B di chuyển thì điểm G di chuyển trên cung tròn qua ba điểm M, L, J dựng trên đoạn MJ. Khi B trùng với N, thì G trùng với J, Khi B trùng với M thì G trùng với M.

Câu IV. (2 điểm): cho các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{3}{4}$. Tính diện tích hình vuông ABCD, biết diện tích tứ giác MNPQ = 25cm².



Ta có: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow AM = BN = CP = QD, AQ = MB = CN = DP$

$\Rightarrow \triangle AMQ = \triangle BNM = \triangle CPN = \triangle DQP$

$\Rightarrow QM = MN = NP = PQ$ và $\widehat{QMN} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình vuông

Do đó: $S_{MNPQ} = MN^2 = MB^2 + BN^2 = \left(\frac{4}{7}AB\right)^2 + \left(\frac{3}{7}BC\right)^2 = \frac{25AB^2}{49} = 25$

Suy ra: $AB^2 = 49$

Vậy $S_{ABCD} = 49 \text{ cm}^2$.

Câu V. (3 điểm):

1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{25a^2}{\sqrt{2a^2 + 7b^2 + 16ab}} + \frac{25b^2}{\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16bc}} + \frac{c^2(3+a)}{a}$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình

$$(x - y - 1)(x + 1 - y) + 6xy + y^2(2 - x - y) = 2(x + 1)(y + 1)$$

1. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{25a^2}{\sqrt{2a^2 + 7b^2 + 16ab}} \geq \frac{25a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} = \frac{25a^2}{\sqrt{(3a+2b)(a+4b)}} \geq \frac{25a^2}{2a+3b}$$

Mặt khác: $\frac{25a^2}{2a+3b} + 2a+3b \geq 10a \Leftrightarrow \frac{25a^2}{2a+3b} \geq 8a-3b$

Tương tự ta có: $\frac{25b^2}{\sqrt{2b^2 + 7c^2 + 16bc}} \geq \frac{25b^2}{2b+3c} \geq 8b-3c$

Ta lại có: $\frac{9c^2}{3a} + 3a \geq 6c \Leftrightarrow \frac{3c^2}{a} \geq 6c-3a$
 $\frac{c^2(3+a)}{a} = \frac{3c^2}{a} + c^2 \geq 6c-3a+c^2 = 8c-3a+c^2-2c$

Do đó:

$$P \geq 8a-3b+8b-3c+8c-3b+c^2-2c = 5(a+b+c)+c^2-2c = c^2-2c+15 \geq (c-1)^2+14 \geq 14$$

Vậy GTNN của P = 14 khi a = b = c = 1.

2.

$$(x-y-1)(x+1-y) + 6xy + y^2(2-x-y) = 2(x+1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - y^2(x+y-2) - 2(x+y) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2(x+y) - y^2(x+y-2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x+y-y^2)(x+y-2) = 3$$

Ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1. } \begin{cases} x+y-2=1 \\ x+y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{TH2. } \begin{cases} x+y-2=-1 \\ x+y-y^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH3. } \begin{cases} x+y-2=3 \\ x+y-y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-2 \\ x=3 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{TH4. } \begin{cases} x+y-2=-3 \\ x+y-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên sau: (x;y) = (3;0), (-1;2), (3;-2), (7;-2), (3;2), (-1;0)