

**Câu 1** (4,0 điểm).

1) Cho biểu thức  $P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$  với  $x \geq 0$ , và

$x \neq 1$ ,  $x \neq \frac{1}{4}$ . Rút gọn biểu thức  $P$  và tìm giá trị của  $x$  để  $P = \frac{7}{3}$ .

2) Gọi  $A$  và  $B$  là giao điểm của đường thẳng  $d: y = -x + 2$  với parabol  $(P): y = x^2$ . Tính diện tích tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ).

**Câu 2** (4,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0. \end{cases}$$

2) Giải phương trình  $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5$ .

**Câu 3** (3,0 điểm).

1) Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $y(x-1) = x^2 + 2$ .

2) Với mỗi số nguyên  $a$ , gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $x^2 + 2ax - 1 = 0$ . Chứng minh  $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$  chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên  $n$ .

**Câu 4** (6,0 điểm).

1) Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ ,  $D$  là điểm bất kì thuộc cạnh  $BC$  ( $D$  khác  $B$  và  $C$ ). Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $AC$ . Đường thẳng  $MN$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $P, Q$  sao cho  $M$  nằm giữa  $P$  và  $N$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  cắt  $AB$  tại  $I$  (khác  $B$ ). Các đường thẳng  $DI$  và  $AC$  cắt nhau tại  $K$ .

a) Chứng minh  $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$ . Từ đó suy ra 4 điểm  $A, I, P, K$  cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh  $\triangle PBD$  đồng dạng với  $\triangle PAK$  và  $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$ .

c) Đường thẳng  $CP$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BDP$  tại  $G$  (khác  $P$ ). Đường thẳng  $IG$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $E$ . Chứng minh khi  $D$  di chuyển trên đoạn  $BC$  thì tỉ số  $\frac{CD}{CE}$  không đổi.

2) Cho tứ giác nội tiếp  $ABCD$ . Chứng minh  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

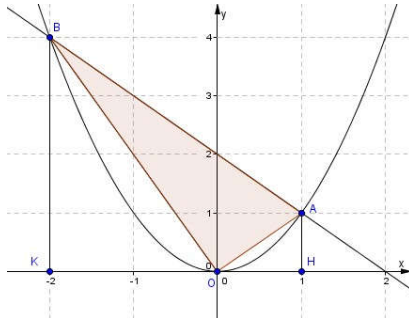
**Câu 5** (3,0 điểm).

1) Cho 3 số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$  và  $a + b + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $F = a^2 + b^2 + c^2$ .

2) Cho đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_{2024}$ . Tại mỗi đỉnh  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2024$ ), người ta ghi một số thực  $a_k$  sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau.

=====Hết=====

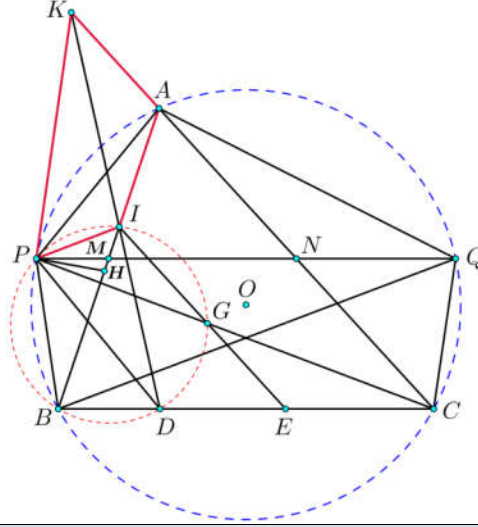
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

| Câu                                                                                                                                                                                                                         | Nội dung                                                                                                                                                                                                                 | Điểm |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Câu 1 (4,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                          |      |
| <b>1.1. (2,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                          |      |
| Cho biểu thức $P = \left( \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left( \frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0$ , và $x \neq 1$ , $x \neq \frac{1}{4}$ . |                                                                                                                                                                                                                          |      |
| Rút gọn biểu thức $P$ và tìm giá trị của $x$ để $P = \frac{7}{3}$ .                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                             | Với $x \geq 0$ , và $x \neq 1$ , $x \neq \frac{1}{4}$ ta có                                                                                                                                                              |      |
|                                                                                                                                                                                                                             | $P = \left( \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) : \left( \frac{(2\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right)$ | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                             | $P = \frac{(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} : \left( \frac{(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{(x-\sqrt{x}+1)} \right)$                                                                      | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                             | $P = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} : \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x)}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}$                                                                                               | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                             | $P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$                                                                                                                                                                                      | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                             | $P = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3x-10\sqrt{x}+3=0$                                                                                                          | 0.5  |
|                                                                                                                                                                                                                             | $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn). Vậy } x \in \left\{ 9; \frac{1}{9} \right\}.$            | 0.5  |
| <b>1.2. (2,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                          |      |
| Gọi $A$ và $B$ là giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 2$ với parabol $(P): y = x^2$ . Tính diện tích tam giác $OAB$ ( $O$ là gốc tọa độ).                                                                                |                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                       | 0.5  |
|                                                                                                                                                                                                                             | Phương trình hoành độ giao điểm $-x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$                                                                                 |      |

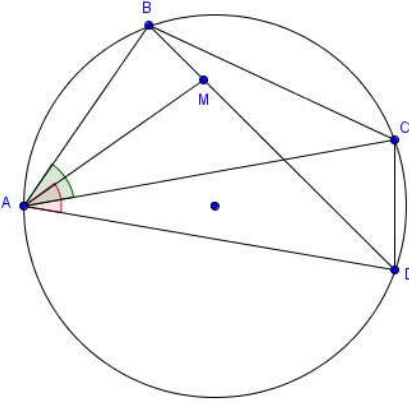
|                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|                                                                                                                                                      | Suy ra $A(1;1), B(-2;4)$ .                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | Gọi $H, K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A, B$ lên trục $Ox$ .                                                                                                                                                                                                      |     |
|                                                                                                                                                      | Có $S_{AHKB} = \frac{(AH + BK) \cdot HK}{2} = \frac{15}{2}$ ; $S_{OAH} = \frac{1}{2}OH \cdot AH = \frac{1}{2}$ ; $S_{OBK} = \frac{1}{2}OK \cdot BK = 4$ .                                                                                                                   | 1.0 |
|                                                                                                                                                      | Vậy $S_{OAB} = S_{AHKB} - S_{OAH} - S_{OBK} = 3$ .                                                                                                                                                                                                                          |     |
| <b>Câu 2 (4,0 điểm)</b>                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
| <b>2.1. (2,0 điểm)</b> Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 & (2) \end{cases}$ . |                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|                                                                                                                                                      | Phương trình (1) $\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases}$ .                                                                                                                                                | 1.0 |
|                                                                                                                                                      | Với $y = 2x$ thay vào (2) ta được $-15x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ .                                                                                                                                                             | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$ ; với $x = -1 \Rightarrow y = -2$ .                                                                                                                                                                                                           |     |
|                                                                                                                                                      | Với $x = 5 - 2y$ thay vào (2) ta được $5y^2 - 30y + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ .                                                                                                                                                      | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | Với $y = 2 \Rightarrow x = 1$ , với $y = 4 \Rightarrow x = -3$ .                                                                                                                                                                                                            |     |
|                                                                                                                                                      | Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(1; 2), (-3; 4), (-1; -2)$ .                                                                                                                                                                                                                 |     |
| <b>2.2. (2,0 điểm)</b> Giải phương trình $3\sqrt{4x+1} + 4x\sqrt{3x-2} = 3x^2 + 4x + 5 \quad (1)$ .                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|                                                                                                                                                      | Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$ .                                                                                                                                                                                                                                            | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | (1) $\Leftrightarrow [3\sqrt{4x+1} - (2x+5)] + x[4\sqrt{3x-2} - (3x+2)] = 0$ . (2)                                                                                                                                                                                          |     |
|                                                                                                                                                      | Vì $x \geq \frac{2}{3}$ nên $\begin{cases} A = 3\sqrt{4x+1} + (2x+5) > 0 \\ B = 4\sqrt{3x-2} + (3x+2) > 0 \end{cases}$ .                                                                                                                                                    | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | (2) $\Leftrightarrow \frac{9(4x+1) - (2x+5)^2}{A} + \frac{x[16(3x-2) - (3x+2)^2]}{B} = 0$                                                                                                                                                                                   |     |
|                                                                                                                                                      | $\Leftrightarrow \frac{-4x^2 + 16x - 16}{A} + \frac{x(-9x^2 + 36x - 36)}{B} = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2 \left( \frac{4}{A} + \frac{9x}{B} \right) = 0$                                                                                                                     | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | Vì $A > 0, B > 0, x \geq \frac{2}{3}$ nên $\frac{4}{A} + \frac{9x}{B} > 0$ .                                                                                                                                                                                                |     |
|                                                                                                                                                      | Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = 2$ .                                                                                                                                                                                                                        |     |
|                                                                                                                                                      | <b>Lưu ý:</b>                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|                                                                                                                                                      | - Nếu học sinh phân tích về dạng $(x-2) \left( \frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 \right) = 0$ (hoặc các dạng tương tự) nhưng không giải được phương trình $\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{12x}{\sqrt{3x-2}+2} - 3x-2 = 0$ thì chỉ cho 0.5 điểm. | 0.5 |
|                                                                                                                                                      | - Học sinh có thể làm theo cách sử dụng bất đẳng thức.                                                                                                                                                                                                                      |     |

| <b>Câu 3 (3,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------|
| <b>3.1. (2,0 điểm)</b> Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y(x-1) = x^2 + 2(1)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |      |
| Dễ thấy $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |      |
| Với $x \neq 1$ ta có $(1) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 2}{x-1} \Leftrightarrow y = x + 1 + \frac{3}{x-1}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  | 0.5  |
| Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $3 : (x-1) \Rightarrow x-1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  | 0.5  |
| Từ đó tìm được các cặp nghiệm $(x; y)$ là $(-2; -2), (0; -2), (2; 6), (4; 6)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  | 1.0  |
| <b>3.2. (1,0 điểm)</b> Với mỗi số nguyên $a$ , gọi $x_1, x_2$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$ . Chứng minh $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n})$ chia hết cho 48 với mọi số tự nhiên $n$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |      |
| Với mọi $a$ phương trình $x^2 + 2ax - 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  | 0.25 |
| Đặt $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ . Ta có<br>$M = \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) = \frac{1}{8}(x_1^{2n} - x_2^{2n})^2(x_1^{2n} + x_2^{2n})$ $= \frac{1}{8}\left[(x_1^{2n} + x_2^{2n})^2 - 4x_1^{2n}x_2^{2n}\right](x_1^{2n} + x_2^{2n})$ $= \frac{1}{8}(S_n^2 - 4) \cdot S_n = \frac{(S_n - 2)(S_n + 2)S_n}{8} = \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right).$                                                                                                                                                                                                                                                                |  | 0.25 |
| Ta chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ luôn là số nguyên dương chẵn. (*)<br>Thật vậy:<br>Với $n = 0$ thì $S_0 = 2$ là số nguyên dương chẵn.<br>Với $n = 1$ thì $S_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4a^2 + 2 = 2(2a^2 + 1)$ là số nguyên dương chẵn (do $a$ là số nguyên).<br>Giả sử (*) đúng đến $n = k$ , tức là $S_{k-1}$ và $S_k$ là các số nguyên dương chẵn. Ta có<br>$S_{k+1} = x_1^{2(k+1)} + x_2^{2(k+1)} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^{2k} + x_2^{2k}) - x_1^2x_2^2[x_1^{2(k-1)} + x_2^{2(k-1)}] = S_1 \cdot S_k - S_{k-1}$ là một số nguyên dương chẵn.<br>Vậy $S_n = x_1^{2n} + x_2^{2n}$ là số nguyên dương chẵn với mọi số tự nhiên $n$ . |  | 0.25 |
| $M = \left(\frac{S_n}{2} - 1\right) \cdot \frac{S_n}{2} \cdot \left(\frac{S_n}{2} + 1\right)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp. Suy ra $M$ chia hết cho 6.<br>Vậy $(x_1^{2n} - x_2^{2n})(x_1^{4n} - x_2^{4n}) = 8M : 48$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |  | 0.25 |
| <b>Câu 4 (6,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |      |
| <b>4.1. (5,0 điểm)</b> Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ , $D$ là điểm bất kì thuộc cạnh $BC$ ( $D$ khác $B$ và $C$ ). Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$ và $AC$ . Đường thẳng $MN$ cắt đường tròn $(O)$ tại $P, Q$ sao cho $M$ nằm giữa $P$ và $N$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác $BDP$ cắt $AB$ tại $I$ (khác $B$ ). Các đường thẳng $DI$ và $AC$ cắt nhau tại $K$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |      |
| a) Chứng minh $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$ . Từ đó suy ra 4 điểm $A, I, P, K$ cùng thuộc một đường tròn.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |      |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p>b) Chứng minh <math>\triangle PBD</math> đồng dạng với <math>\triangle PAK</math> và <math>\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}</math>.</p> <p>c) Đường thẳng <math>CP</math> cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>BDP</math> tại <math>G</math> (khác <math>P</math>). Đường thẳng <math>IG</math> cắt đường thẳng <math>BC</math> tại <math>E</math>. Chứng minh khi <math>D</math> di chuyển trên đoạn <math>BC</math> thì tỉ số <math>\frac{CD}{CE}</math> không đổi.</p> |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>a) (2,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| Vì tứ giác $APBC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PAC} + \widehat{PBC} = 180^\circ$ (1).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5  |
| Vì tứ giác $BDIP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PID} + \widehat{PBC} = 180^\circ$ (2).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
| Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{PID} = \widehat{PAC}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5  |
| Lại có $\widehat{PID} + \widehat{PIK} = 180^\circ$ ; $\widehat{PAC} + \widehat{PAK} = 180^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
| Do đó $\widehat{PIK} = \widehat{PAK}$ ; mà hai góc này cùng nhìn cạnh $PK \Rightarrow$ tứ giác $AIPK$ nội tiếp hay 4 điểm $A, I, P, K$ nằm trên cùng một đường tròn.                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5  |
| <b>b) (2,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| Ta có $\widehat{APK} = \widehat{AIK} = \widehat{BID} = \widehat{BPD}$ và $\widehat{PBD} = 180^\circ - \widehat{PID} = 180^\circ - \widehat{PAC} = \widehat{PAK}$ .<br>Suy ra $\triangle PBD$ đồng dạng với $\triangle PAK$ (g - g) $\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PD}{PK}$ (3).                                                                                                                    | 1.0  |
| Vì tứ giác $APBQ$ nội tiếp nên tam giác $PMB$ đồng dạng với tam giác $AMQ$ (g-g) và tam giác $QBM$ đồng dạng với tam giác $APM$ (g-g). Do đó<br>$\begin{cases} \frac{PB}{QA} = \frac{MP}{MA} \\ \frac{QB}{PA} = \frac{MB}{MP} \end{cases} \Rightarrow \frac{PB}{QA} \cdot \frac{QB}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{QA}{QB}$ (4).<br>Từ (3) và (4), suy ra $\frac{QA}{QB} = \frac{PD}{PK}$ . | 1.0  |
| <b>c) (1,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| Trên đoạn $AB$ xác định điểm $H$ sao cho $\widehat{APH} = \widehat{KPI}$ .<br>Vì tứ giác $AIPK$ nội tiếp, nên $\widehat{KPI} = \widehat{BAC}$ .<br>Lại có $A, P$ và $\widehat{BAC}$ không đổi nên $H$ là điểm cố định.                                                                                                                                                                                 | 0.5  |
| $\triangle KPI$ đồng dạng với $\triangle APH$ (g - g) $\Rightarrow \frac{KI}{AH} = \frac{KP}{AP}$ (5).                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.25 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\triangle PKD$ đồng dạng với $\triangle PAB$ (g - g) $\Rightarrow \frac{KP}{AP} = \frac{KD}{AB}$ (6).<br>Từ (5) và (6) suy ra $\frac{KD}{AB} = \frac{KI}{AH} \Rightarrow \frac{KD}{KI} = \frac{AB}{AH}$ (7).                                                            |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Ta có $\widehat{PGI} = \widehat{PBI} = \widehat{PCA}$ nên $GI \parallel AC$ hay $IE \parallel AC \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{KD}{KI}$ (8).<br>Từ (7) và (8) suy ra $\frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AH}$ mà $\frac{AB}{AH}$ không đổi nên $\frac{CD}{CE}$ không đổi.     | 0.25 |
| <b>4.2. (1,0 điểm)</b> Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ . Chứng minh $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  <p>Gọi <math>M</math> là điểm trên đoạn <math>BD</math> sao cho <math>\widehat{DAM} = \widehat{CAB}</math>.</p>                                                                        | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Hai tam giác $\triangle DAM$ và $\triangle CAB$ đồng dạng (g-g) nên $\frac{DA}{CA} = \frac{DM}{CB} \Rightarrow DA \cdot CB = CA \cdot DM$ . (1)                                                                                                                          | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Hai tam giác $\triangle BAM$ và $\triangle CAD$ đồng dạng (g-g) nên $\frac{BA}{CA} = \frac{BM}{CD} \Rightarrow BA \cdot CD = CA \cdot BM$ . (2)                                                                                                                          | 0.25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Từ (1) và (2) suy ra<br>$DA \cdot CB + BA \cdot CD = CA \cdot DM + CA \cdot BM \Leftrightarrow AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .                                                                                                                                | 0.25 |
| <b>Câu 5 (3,0 điểm)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
| <b>5.1. (2,0 điểm)</b> Cho 3 số thực $a, b, c$ thỏa mãn $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ và $a + b + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + c^2$ .                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Ta có $F = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 36 - 2(ab + bc + ca)$ .                                                                                                                                                                                   | 0.5  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Vì $1 \leq a \leq 3; 1 \leq b \leq 3; 1 \leq c \leq 3$ nên ta có<br>$(a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0 \Leftrightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$<br>$\Leftrightarrow abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27$ (1).                                              | 0.5  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Và $(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0 \Leftrightarrow abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geq 0$<br>$\Leftrightarrow abc \geq (ab + bc + ca) - 5$ (2).                                                                                                                    | 0.5  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Từ (1) và (2) suy ra $(ab + bc + ca) - 5 \leq abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27$<br>$\Rightarrow ab + bc + ca \geq 11 \Rightarrow F = 36 - 2(ab + bc + ca) \leq 14$ .<br>Đẳng thức xảy ra khi $a = 1; b = 2; c = 3$ và các hoán vị.<br>Vậy giá trị lớn nhất của $F$ bằng 14. | 0.5  |
| <b>5.2. (1,0 điểm)</b> Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_{2024}$ . Tại mỗi đỉnh $A_k$ ( $k = 1, 2, \dots, 2024$ ), người ta ghi một số thực $a_k$ sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu hai số trên hai đỉnh kề nhau bằng một số nguyên dương không lớn hơn 3. Tìm giá trị lớn nhất có thể được của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh của đa giác đã cho, biết rằng các số ghi tại các đỉnh đã cho đôi một khác nhau. |                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Xét đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_{2024}$ . Khi đó $ a_k - a_{k+1}  \in \{1; 2; 3\}$ , ( $k = 1, 2, \dots, 2023$ ). Không mất tính tổng                                                                                                                                    | 0.25 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  | <p>quát, coi <math>a_1</math> là nhỏ nhất, <math>a_n</math> là lớn nhất (dễ thấy <math>n \geq 2</math>). Đặt <math>d = \max_{i \neq j}  a_i - a_j </math> khi đó <math>d = a_n - a_1</math> và là một số nguyên dương.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |
|  | <p>Giả sử theo chiều kim đồng hồ có <math>n - 2</math> đỉnh nằm giữa <math>A_1, A_n</math>. Suy ra theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ có <math>2024 - n</math> đỉnh nằm giữa <math>A_1, A_n</math>. Hơn nữa giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số kề nhau không vượt quá 3. Do đó</p> $d =  a_1 - a_n  \leq  a_1 - a_2  +  a_2 - a_3  + \dots +  a_{n-1} - a_n  \leq 3(n - 1).$ <p>Tương tự ta có <math>d \leq 3(2024 - n + 1)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0.25 |
|  | <p>Suy ra <math>d \leq \frac{3(n - 1) + 3(2024 - n + 1)}{2} = 3036</math>.</p> <p>Nếu <math>d = 3036</math> thì hiệu giữa hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau đúng bằng 3 hay ta có</p> $ a_i - a_{i+1}  = 3, \quad i = 1, 2, \dots, 2023 \Rightarrow  a_i - a_{i+1}  =  a_{i+1} - a_{i+2}  \Rightarrow \begin{cases} a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \\ a_i = a_{i+2} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, 2022)$ $\Rightarrow a_i - a_{i+1} = a_{i+1} - a_{i+2} \Rightarrow a_1 - a_{2024} = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2023} - a_{2024} = 2023(a_1 - a_2)$ $\Rightarrow  a_1 - a_{2024}  =  2023(a_1 - a_2) $ $\Rightarrow 3 = 2023 \times 3.$ <p>Điều này không xảy ra. Suy ra <math>d \leq 3035</math>.</p>                                                                           | 0.25 |
|  | <p>Ta xây dựng một trường hợp cho <math>d = 3035</math> như sau:</p> $a_1 = 0, a_2 = 2, a_k = a_{k-1} + 3 = 3k - 4 \text{ với } k = 3, 4, \dots, 1013;$ $a_{1014} = a_{1013} - 2 = 3033, a_k = a_{k-1} - 3 = 6075 - 3k \text{ với } k = 1015, 1016, \dots, 2024.$ <p>Khi đó hiệu lớn nhất là <math>a_{1013} - a_1 = 3035</math>.</p> <p>Các số <math>a_2, a_3, \dots, a_{1013}</math> là các số nguyên dương tăng dần có dạng <math>3t - 4</math> chia cho 3 dư 2. Các số <math>a_{1014}, a_{1015}, \dots, a_{2024}</math> là các số nguyên dương giảm dần có dạng <math>6075 - 3h</math> chia hết cho 3. Suy ra các số <math>a_1, a_2, \dots, a_{2024}</math> đôi một khác nhau.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của giá trị tuyệt đối của hiệu giữa hai số ghi trên mỗi cặp đỉnh bằng 3035.</p> | 0.25 |

**Chú ý:** Nếu học sinh làm theo các đáp án khác thì giám khảo căn cứ vào các bước làm để cho điểm phù hợp.