

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Cho $f(x) = 2x^2 - 2x - 7$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

2. Cho các số thực a, b, c bất kì thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2022$. Chứng minh rằng

$$(2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 = 18198.$$

Câu 2 (2,0 điểm). Giải các phương trình và hệ phương trình:

1. $x^2 + \sqrt{(x+1)^3} = 3x + 4$

2.
$$\begin{cases} (\sqrt{y+7})^3 + 4(2x-y) = 2(x+4)\sqrt{y+7} - 4 \\ 2\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-14} = x+4. \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm).

Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O, R) sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O, R) .

1. Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB . Chứng minh rằng $MH \cdot MO = MC \cdot MD$ và tứ giác $OHCD$ nội tiếp.

2. Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng.

3. Giả sử $OM = 3R$. Kẻ đường kính BK của đường tròn (O, R) . Gọi I là giao điểm của các đường thẳng MK và AB . Tính giá trị biểu thức $T = 8 \frac{IM^2 + IA^2}{IK^2 + IH^2} + 5 \frac{IA}{AB}$.

Câu 4 (1,5 điểm).

1. Chứng minh rằng $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

2. Cho p là số nguyên tố có dạng $4k+3$, ($k \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $a^2 + b^2$ chia hết cho p thì $a : p$ và $b : p$. Từ đó suy ra phương trình $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$ không có nghiệm nguyên.

Câu 5 (1,5 điểm).

1. Xét các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x + y + z \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{1+x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{1+y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{1+z^3}}.$$

2. Từ 2022 số nguyên dương đầu tiên là 1, 2, 3, ..., 2022, người ta chọn ra n số phân biệt sao cho cứ hai số bất kì được chọn ra đều có hiệu không là ước của tổng hai số đó. Chứng minh rằng $n \leq 674$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho $f(x) = 2x^2 - 2x - 7$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

2. Cho các số thực a, b, c bất kì thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2022$. Chứng minh rằng

$$(2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 = 18198.$$

Lời giải

1. Vì $f(x) = 2x^2 - 2x - 7$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 nên $f(x) = 2(x - x_1)(x - x_2)$

$$\text{Ta có } T = g(x_1) \cdot g(x_2) = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_1 + 1)(x_2 + 1)$$

$$\Rightarrow T = (1 - x_1)(1 - x_2)(-1 - x_1)(-1 - x_2) = \frac{f(1)}{2} \cdot \frac{f(-1)}{2} = \frac{(-7) \cdot (-3)}{4} = \frac{21}{4}.$$

Cách khác: Học sinh có thể tìm hai nghiệm của $f(x)$ là $x_1 = \frac{1 - \sqrt{15}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}$

$$\text{Từ đó tính } T = g(x_1) \cdot g(x_2) = \left[\left(\frac{1 - \sqrt{15}}{2} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{1 + \sqrt{15}}{2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{21}{4}.$$

2. Đặt $t = a + b + c$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 &= (2t - 3a)^2 + (2t - 3b)^2 + (2t - 3c)^2 \\ &= 12t^2 - 12t(a + b + c) + 9(a^2 + b^2 + c^2) = 12t^2 - 12t^2 + 9(a^2 + b^2 + c^2) = 9(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2 = 9 \cdot 2022 = 18198.$$

Cách khác: Học sinh có thể khai triển bình phương từng biểu thức rồi rút gọn và cũng được kết quả cần chứng minh.

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình:

1. $x^2 + \sqrt{(x+1)^3} = 3x + 4.$

2.
$$\begin{cases} (\sqrt{y+7})^3 + 4(2x-y) = 2(x+4)\sqrt{y+7} - 4 \\ 2\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-14} = x+4. \end{cases}$$

Lời giải

1. Điều kiện xác định $x \geq -1$.

$$\text{Phương trình cho tương đương với } (x+1)(x-4+\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x+1} = 4-x \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x+1} = 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+1 = (4-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện có tập nghiệm của phương trình là } \left\{ -1; \frac{9 - \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

2. Điều kiện xác định $x \geq -\frac{1}{2}, y \geq 7$

Ta

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y+7}(y+7-2x-8)+4(2x+1-y)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{y+7}-4)(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+7}=4 \\ y=2x+1 \end{cases} \quad \text{có}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{y+7}=4 \Leftrightarrow y=9$, thay vào (2) ta được

$$2\sqrt{2x+1}+2=x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}=x+2 \Leftrightarrow 4(2x+1)=x^2+4x+4 \quad (\text{do } x \geq -\frac{1}{2} > -2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

Trường hợp 2: $y=2x+1$, thay vào (2) ta được

$$2\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x-12}=x+4 \Leftrightarrow 2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3})=(\sqrt{2x+1})^2-(\sqrt{x-3})^2 \quad (*)$$

Do $\sqrt{2x+1}$ và $\sqrt{x-3}$ không đồng thời bằng 0 nên $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} > 0$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow 2=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=4+4\sqrt{x-3}+(x-3) \Leftrightarrow 4\sqrt{x-3}=x \Leftrightarrow 16(x-3)=x^2 \quad (\text{do } y=2x+1 \geq 7 \Rightarrow x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-16x+48=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=12 \end{cases}$$

Với $x=4$ thì $y=9$

Với $x=12$ thì $y=25$

Kết hợp các điều kiện ta có tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(0; 9), (4; 9), (12; 25)\}$.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O, R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi D là điểm trên cung lớn AB của đường tròn (O, R) sao cho $AD \parallel MB$ và C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O, R) .

1. Gọi H là giao điểm của các đường thẳng OM và AB . Chứng minh rằng $MH.MO=MC.MD$ và tứ giác $OHCD$ nội tiếp.

2. Gọi G là trọng tâm tam giác MAB . Chứng minh rằng ba điểm A, C, G thẳng hàng.

3. Giả sử $OM=3R$. Kẻ đường kính BK của đường tròn (O, R) . Gọi I là giao điểm của các đường thẳng MK và AB . Tính giá trị biểu thức $T=8\frac{IM^2+IA^2}{IK^2+IH^2}+5\frac{IA}{AB}$.

Lời giải

$$\Rightarrow \Delta EMC \propto \Delta EAM \quad (gg) \Rightarrow \frac{EM}{EA} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EM^2 = EA \cdot EC \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $EB^2 = EM^2 \Rightarrow EB = EM$ hay E là trung điểm của MB

Tam giác MAB có AE là đường trung tuyến nên AE đi qua trọng tâm G của ΔMAB hay ba điểm A, C, G thẳng hàng.

3. Tam giác OAM vuông tại A và có đường cao AH nên $OA^2 = OH \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{OA^2}{OM} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$

$$\Rightarrow MH = OM - OH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3} \text{ và } AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}R$$

Mà BK là đường kính của đường tròn (O, R) nên ΔABK vuông tại A và $BK = 2R$

$$\Rightarrow AK = \sqrt{BK^2 - AB^2} = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}R\right)^2} = \frac{2R}{3}$$

$$\text{Tính được } IA = \frac{2\sqrt{2}R}{15}, IH = \frac{8\sqrt{2}R}{15}, IM = \frac{8\sqrt{3}R}{5}, IK = \frac{2\sqrt{3}R}{5}$$

$$\text{Vậy } T = \frac{7003}{118}.$$

Câu 4. (1,5 điểm)

1. Chứng minh rằng $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

2. Cho p là số nguyên tố có dạng $4k + 3$, ($k \in \mathbb{N}$). Chứng minh rằng nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^2 + b^2$ chia hết cho p thì $a : p$ và $b : p$. Từ đó suy ra phương trình $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

1. Ta có $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120 = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

Ta thấy với mọi số tự nhiên n , thì $P(n)$ là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên

$$\begin{cases} P(n) : 3, \forall n \in \mathbb{N} \\ P(n) : 8, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Mà $(3, 8) = 1$ nên $P(n) : 24, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Giả sử a không chia hết cho p thì từ giả thiết $a^2 + b^2$ chia hết cho p ta suy ra b cũng không chia hết cho p

$$\text{Do đó } (a, p) = (b, p) = 1. \text{ Áp dụng định lý Fermat ta có } \begin{cases} a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \\ b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p} (*)$$

Mặt khác ta có $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1}$ chia hết cho $a^2 + b^2$

Kết hợp $a^2 + b^2$ chia hết cho p ta suy ra $a^{4k+2} + b^{4k+2}$ chia hết cho p (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2 \mid p \Rightarrow p = 2$ (mâu thuẫn với giả thiết là số nguyên tố có dạng $4k + 3$).
Do đó điều giả sử là sai.

Suy ra $a \mid p$. Kết hợp giả thiết suy ra $b \mid p$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Giả sử phương trình $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$ có nghiệm nguyên

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $(x + 2)^2 + (3y)^2 = 62$

Suy ra $(x + 2)^2 + (3y)^2$ chia hết cho 31 và 31 là số nguyên tố có dạng $4k + 3$

Áp dụng chứng minh trên ta suy ra $\begin{cases} (x + 2) \mid 31 \\ (3y) \mid 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 \mid 31^2 \\ (3y)^2 \mid 31^2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x + 2)^2 + (3y)^2 \mid 31^2 \Rightarrow 62 \mid 31^2$ (vô lý).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 5. (1,5 điểm)

1. Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{yz + \sqrt{1 + x^3}} + \frac{y^2}{zx + \sqrt{1 + y^3}} + \frac{z^2}{xy + \sqrt{1 + z^3}}.$$

2. Từ 2022 số nguyên dương đầu tiên là 1, 2, 3, ..., 2022, người ta chọn ra n số phân biệt sao cho cứ hai số bất kì được chọn ra đều có hiệu không là ước của tổng hai số đó. Chứng minh rằng $n \leq 674$.

Lời giải

1. Ta có $\sqrt{1 + x^3} = \sqrt{(1 + x)(1 - x + x^2)} \leq \frac{(1 + x) + (1 - x + x^2)}{2} = \frac{x^2 + 2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{yz + \sqrt{1 + x^3}} \geq \frac{x^2}{yz + \frac{x^2 + 2}{2}} = \frac{2x^2}{2yz + x^2 + 2}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{y^2}{zx + \sqrt{1 + y^3}} \geq \frac{2y^2}{2zx + y^2 + 2}; \frac{z^2}{xy + \sqrt{1 + z^3}} \geq \frac{2z^2}{2xy + z^2 + 2}$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{2x^2}{2yz + x^2 + 2} + \frac{2y^2}{2zx + y^2 + 2} + \frac{2z^2}{2xy + z^2 + 2} \geq 2 \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + 6}$$

$$\text{Kết hợp giả thiết ta có } P \geq 2 \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{1}{6}(x + y + z)^2} = \frac{12}{7}$$

Với $x = y = z = 2$ thì $P = \frac{12}{7}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{12}{7}$.

2. Với hai số x, y bất kì trong số n số lấy ra thì rõ ràng $|x - y| \neq 0$ và $|x - y| \neq 1$.

Nếu $|x - y| = 2$ thì x, y cùng tính chẵn lẻ nên có $(x + y) \vdots |x - y|$ (mâu thuẫn giả thiết), do đó $|x - y| \neq 2$. Vậy $|x - y| \geq 3$.

Gọi n số lấy ra sắp thứ tự là $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Khi đó có:

$$a_1 \geq 1$$

$$a_2 - a_1 \geq 3 \Rightarrow a_2 \geq a_1 + 3$$

$$a_3 - a_2 \geq 3 \Rightarrow a_3 \geq a_2 + 3 \geq a_1 + 2 \cdot 3$$

... Cứ tiếp tục quá trình trên, ta có $a_n \geq a_1 + (n - 1) \cdot 3$.

$$\text{Vậy có } 2022 \geq a_n \geq a_1 + 3(n - 1) \geq 1 + 3n - 3 \Rightarrow n \leq \frac{2024}{3} = 674\frac{2}{3}.$$

Từ đó dẫn đến $n \leq 674$, ta có điều phải chứng minh.

---Hết---