

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $(3x - 2)(3y - 2) = 1$. Chứng minh $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ là số hữu tỉ.

b) Giải phương trình: $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x - 1}$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x + 1$ không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó kí hiệu $\{a\} = a - [a]$ với

$[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right).$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại E (E khác B). Gọi D là một điểm trên cung nhỏ BE (D khác B, D khác E). Hai đường thẳng DC và AH cắt nhau tại G , đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại M (M khác E), hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I , đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại P (P khác C).

a) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp;

b) Chứng minh $GA \cdot GI = GE \cdot GM$;

c) Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N , DB và CP cắt nhau tại K . Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau.

Câu 5. (0,5 điểm)

Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương.

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $(3x-2)(3y-2)=1$.

Chứng minh $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ là số hữu tỉ.

b) Giải phương trình: $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x-1}$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x+1$ không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó kí hiệu $\{a\} = a - [a]$ với $[a]$

là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right).$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại E (E khác B). Gọi D là một điểm trên cung nhỏ BE (D khác B , D khác E). Hai đường thẳng DC và AH cắt nhau tại G , đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại M (M khác E), hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I , đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại P (P khác C).

a) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp;

b) Chứng minh $GA.GI = GE.GM$;

c) Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N , DB và CP cắt nhau tại K . Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau.

Câu 5. (0,5 điểm)

Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương.

..... Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1 (3,0 điểm)

- a. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $(3x-2)(3y-2)=1$. Chứng minh $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ là số hữu tỉ.
- b. Giải phương trình: $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x-1}$.
- c. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Lời giải

- a. Cho các số hữu tỉ x, y thỏa mãn $(3x-2)(3y-2)=1$. Chứng minh $A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ là số hữu tỉ.

$$\text{Ta có } (3x-2)(3y-2)=1$$

$$\Leftrightarrow 9xy - 6x - 6y + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 9xy = 6x + 6y - 3$$

$$\Leftrightarrow 3xy = 2x + 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow 3xy = 2(x+y) - 1$$

$$A = \sqrt{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - 3xy} = \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} = \sqrt{(x+y-1)^2} = |x+y-1|$$

Vì x, y hữu tỉ nên suy ra $|x+y-1|$ là số hữu tỉ

$\Rightarrow A$ hữu tỉ (đpcm)

- b. Giải phương trình: $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x-1}$ (1)

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{1}{5}$$

Phương trình (1) tương đương với phương trình

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 - x\sqrt{5x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (6x^2 - 3x\sqrt{5x-1}) + (2x\sqrt{5x-1} - 5x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2x - \sqrt{5x-1}) + \sqrt{5x-1}(2x - \sqrt{5x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{5x-1})(3x + \sqrt{5x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{5x-1} = 0 \text{ hoặc } 3x + \sqrt{5x-1} = 0$$

$$\text{TH1: } 2x - \sqrt{5x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{5x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 5x-1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 4x-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn đk)} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } 3x + \sqrt{5x-1} = 0$$

Do điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$ nên $3x + \sqrt{5x-1} > 0$ với mọi giá trị của x

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{1; \frac{1}{4}\right\}$

$$\text{c. Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Điều kiện } x \neq 0; y \neq 0$$

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \quad (1) \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Nhân vế với vế của hai phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\frac{x^2}{y} + x\right)\left(\frac{y^2}{x} + y\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow xy + y^2 + x^2 + xy = 9$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-3 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x+y=3 \Rightarrow y=3-x$$

Thay vào $\frac{x^2}{y} + x = 6$ ta được $\frac{x^2}{3-x} + x = 6$

Điều kiện $x \neq 3$

$$\frac{x^2}{3-x} + x = 6 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3-x} + \frac{x(3-x)}{3-x} = \frac{6(3-x)}{3-x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - x^2 = 18 - 6x$$

$$\Leftrightarrow 9x = 18$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (tmđk)}$$

Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được $\frac{4}{y} + 2 = 6 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn)

TH2: $x + y = -3 \Rightarrow y = -3 - x$

Thay vào $\frac{x^2}{y} + x = 6$ ta được $\frac{x^2}{-3-x} + x = 6$

Điều kiện $x \neq -3$

$$\frac{x^2}{-3-x} + x = 6 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{3+x} + \frac{x(3+x)}{3+x} = \frac{6(3+x)}{3+x}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 3x + x^2 = 18 + 6x$$

$$\Leftrightarrow 3x = -18$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \text{ (tmđk)}$$

Thay $x = -6$ vào phương trình (1) ta được $\frac{36}{y} - 6 = 6 \Leftrightarrow y = 3$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(2; 1); (-6; 3)$.

Câu 2 (2,0 điểm)

- Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x + 1$ không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.
- Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó kí hiệu $\{a\} = a - [a]$ với $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Lời giải

- Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x + 1$ không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

Giả sử $25x + 1$ có thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp

Khi đó, ta có $25x + 1 = n(n + 1)$ (với $n \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 1 = 25x$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 3n - 6 + 5 = 25x$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n+3) + 5 = 25x$$

Vì x là số nguyên nên $25x$ chia hết cho 25 với mọi x nguyên (*)

TH1: $n-2$ chia hết cho 5 thì

$n+3 = (n-2) + 5$ cũng chia hết cho 5 nên $(n-2)(n+3)$ chia hết cho 25

$\Rightarrow (n-2)(n+3) + 5$ không chia hết cho 25

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với (*), nên trường hợp này loại

TH2: $n-2$ không chia hết cho 5 thì

$n+3 = (n-2) + 5$ cũng không chia hết cho 5 nên $(n-2)(n+3)$ không chia hết cho 5

$\Rightarrow (n-2)(n+3) + 5$ không chia hết cho 5 hay về trái không chia hết cho 25

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với (*), nên trường hợp này loại

Vậy với x là số nguyên thì $25x+1$ không thể viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b. Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó kí hiệu $\{a\} = a - [a]$ với $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Ta có $3x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0$ với mọi giá trị của x

$2x^2 + 1 > 0$ với mọi giá trị của x

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} > 0 \quad (1)$$

Với mọi giá trị của x , ta có $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$

Hay $2x \leq x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2x + 1 \leq 4x^2 + 2$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \leq \frac{4x^2 + 2}{2x^2 + 1} = 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } \left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2} \\ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(3x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 4x + 2 = 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{TH2: } \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(3x^2+2x+1) = 3(2x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+4x+2 = 6x^2+3$$

$$\Leftrightarrow 4x=1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy các số thực x cần tìm là $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$.

Câu 3 (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si, ta có

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{xy}$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

$$\text{Khi đó ta có } P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq \left[(x+y)^2 + z^2 \right] \left(\frac{2}{xy} + \frac{1}{2z^2} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq \left[(x+y)^2 + z^2 \right] \left(\frac{8}{(x+y)^2} + \frac{1}{2z^2} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq \left[\left(\frac{x+y}{z} \right)^2 + 1 \right] \left[8 \cdot \left(\frac{z}{x+y} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{x+y}{z} \right)^2$$

Do $x + y \leq z$ nên $0 < t \leq 1$

Ta có $P \geq (t+1)\left(\frac{8}{t} + \frac{1}{2}\right)$ với $0 < t \leq 1$

$$\Rightarrow P = \frac{t}{2} + \frac{8}{t} + \frac{17}{2} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t}\right) + \frac{15}{2t} + \frac{17}{2} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2t}} + \frac{15}{2} + \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq 1 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 17$$

$$\Rightarrow P \geq 17$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}z$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 17 khi $x = y = \frac{1}{2}z$

Câu 4 (3,5 điểm)

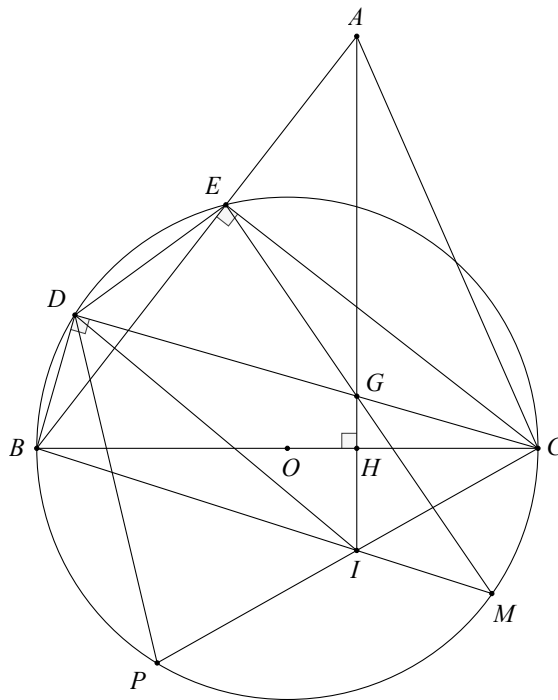
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại E (E khác B). Gọi D là một điểm trên cung nhỏ BE (D khác B , D khác E). Hai đường thẳng DC và AH cắt nhau tại G , đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại M (M khác E), hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I , đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại P (P khác C).

a) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp;

b) Chứng minh $GA.GI = GE.GM$;

c) Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N , DB và CP cắt nhau tại K . Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp;

D thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

AH là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^\circ$

G là giao điểm của DC và $AH \Rightarrow \widehat{BDG} = 90^\circ; \widehat{BHG} = 90^\circ$

Xét tứ giác $BDGH$ có $\widehat{BDG} + \widehat{BHG} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{BDG}, \widehat{BHG}$ là hai góc ở vị trí đối nhau

Nên suy ra tứ giác $BDGH$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{HGC} \text{ hay là } \widehat{DBC} = \widehat{IGC}$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{DBC} = \widehat{DPC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{DC}$) $\Rightarrow \widehat{DPC} = \widehat{IGC}$

$\Rightarrow$ tứ giác $DGIP$ nội tiếp (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của nó) (dnhb)

b) Chứng minh $GA.GI = GE.GM$;

E thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn cung nửa đường tròn)

$$\text{Ta có } \widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^\circ, \widehat{BCE} + \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BCE}$$

Xét đường tròn (O) có $\widehat{BCE} = \widehat{BME}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BE}$)

$$\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BME} \text{ hay là } \widehat{EAG} = \widehat{IMG}$$

Xét $\triangle GEA$ và $\triangle GIM$ có

$$\widehat{EGA} = \widehat{IGM} \text{ (đối đỉnh), } \widehat{EAG} = \widehat{IMG}$$

$$\Rightarrow \triangle GEA \sim \triangle GIM \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{GA} = \frac{GI}{GM} \text{ (cặp cạnh tỉ lệ)}$$

$$\Rightarrow GA.GI = GE.GM \text{ (đpcm)}$$

Vậy $GA.GI = GE.GM$.

c) Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau.

Xét $\triangle EGD$ và $\triangle CGM$ có

$$\widehat{EGD} = \widehat{CGM} \text{ (đối đỉnh), } \widehat{EDG} = \widehat{CMG} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{EC})$$

$$\Rightarrow \triangle EGD \sim \triangle CGM \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{GD} = \frac{GC}{GM} \text{ (cặp cạnh tỉ lệ)}$$

$$\Rightarrow GE.GM = GC.GD$$

$\Rightarrow$ tứ giác $DNKC$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{KNC} = \widehat{KDC} = 90^\circ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{KC}$)

$\Rightarrow NK \perp NC$

Mà $AH \perp NC$ nên suy ra $NK \parallel AH$

Vậy $NK \parallel AH$ (đpcm).

Câu 5 (0,5 điểm)

Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương.

Lời giải

Lập 15 nhóm như sau:

Nhóm 1: 1;4;9;16

Nhóm 2: 2;8;18

Nhóm 3: 3;12

Nhóm 4: 5;20

Với 11 nhóm tiếp theo, mỗi nhóm có 1 số là một trong 11 số không ở nhóm nào trong 4 nhóm trên

Với 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23 được xếp vào 15 nhóm

$\Rightarrow$ Có hai số được xếp vào cùng một nhóm, mà 11 nhóm cuối chỉ có 1 số

$\Rightarrow$ Hai số đó ở cùng một nhóm trong các nhóm từ nhóm 1 đến nhóm 4

$\Rightarrow$ Tích của chúng là số chính phương

Vậy trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác

nhau có tích là số chính phương.