

Câu 1 (2,0 điểm).

a. So sánh biểu thức  $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$  với  $-\frac{5}{2}$ .

b. Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x+1}{2x^2+3x}$  tại  $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$ .

Câu 2 (2,0 điểm).

a. Giải phương trình:  $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

b. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

a. Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình  $y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$ .

b. Cho đa thức  $P(x)$  với các hệ số nguyên thỏa mãn  $P(2021).P(2022) = 2023$ . Chứng minh rằng đa thức  $P(x) - 2024$  không có nghiệm nguyên.

Câu 4 (3,0 điểm).

1. Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $AB$  không đi qua tâm  $O$ . Gọi  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ ;  $D$  là một điểm thay đổi trên cung lớn  $AB$  ( $D$  khác  $A$  và  $B$ );  $DM$  cắt  $AB$  tại  $C$ .

a. Chứng minh rằng  $MB.BD = MD.BC$ ;

b. Chứng minh rằng  $MB$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  và khi điểm  $D$  thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BCD$  nằm trên một đường thẳng cố định.

2. Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AB = \sqrt{2}$ . Gọi  $R_1, R_2$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Chứng minh rằng  $R_1 + R_2 \geq 2$ .

Câu 5 (1,0 điểm). Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức  $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$ .

----- HẾT -----

**Câu 1 (2,0 điểm).**

- a. So sánh biểu thức  $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$  với  $-\frac{5}{2}$ .
- b. Tính giá trị của biểu thức  $B = \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x+1}{2x^2+3x}$  tại  $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$ .

**Câu 2 (2,0 điểm).**

- a. Giải phương trình:  $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$
- b. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

**Câu 3 (2,0 điểm).**

- a. Tìm các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình  $y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$ .
- b. Cho đa thức  $P(x)$  với các số nguyên thỏa mãn  $P(2021).P(2022) = 2023$ . Chứng minh rằng đa thức  $P(x) - 2024$  không có nghiệm nguyên.

**Câu 4 (3,0 điểm).**

- Cho đường tròn (O) và dây cung AB không đi qua tâm O. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB; D là 1 điểm thay đổi trên cung lớn AB (D khác A và B); DM cắt AB tại C.
  - Chứng minh rằng  $MB.BD = MD.BC$ ;
  - Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và khi điểm D thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên một đường thẳng cố định.
- Cho hình thoi ABCD có  $AB = \sqrt{2}$ . Gọi  $R_1, R_2$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng  $R_1 + R_2 \geq 2$ .

**Câu 5 (1,0 điểm).** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$ .

..... HẾT .....

## Lời giải

### Câu 1

a. ĐKXĐ: 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right]$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Ta có: } A + \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{2} = \frac{2(\sqrt{x}-2) + 5(\sqrt{x}+1)}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{7\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow A + \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow A > -\frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } A > -\frac{5}{2}.$$

b. Vì  $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  nên  $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$  là nghiệm của đa thức  $2x^2 + 2x - 1$

$$\text{Do đó: } B = \frac{2x^{2023}(2x^2 + 2x - 1) + 2x + 1}{(2x^2 + 2x - 1) + x + 1} = \frac{2x + 1}{x + 1} = 3 - \sqrt{3}.$$

### Câu 2.

a. ĐKXĐ: 
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Phương trình đã cho đương đương với :

$$4x(3x-1) + x - 1 = 4x\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 - (3x+1) = 4x\sqrt{3x+1}$$

$$\text{Đặt } a = 2x, b = \sqrt{3x+1} \text{ ta có phương trình } 3a^2 - b^2 = 2ab \Leftrightarrow (b-a)(b+3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b = -3a \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \sqrt{3x+1} = 2x \\ \sqrt{3x+1} = -6x \end{cases}$$

+) Với  $\sqrt{3x+1} = 2x$ , điều kiện  $x > 0$ , ta có

$$\sqrt{3x+1} = 2x \Leftrightarrow 3x+1 = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases} (KTM)$$

+) Với  $\sqrt{3x+1} = -6x$ , điều kiện  $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ , ta có

$$\sqrt{3x+1} = -6x \Leftrightarrow 36x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{153}}{72} \\ x = \frac{3 + \sqrt{153}}{72} \end{cases} (KTM)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x=1$ ,  $x = \frac{3 - \sqrt{153}}{72}$ .

b. Ta có  $\begin{cases} x+y+xy=8 \\ \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1)=9 \\ \frac{1}{(x+1)^2-1} + \frac{1}{(y+1)^2-1} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Đặt  $u = x+1, v = y+1$

Hệ đã cho trở thành  $\begin{cases} uv=9 \\ \frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{v^2-1} = \frac{1}{4} \end{cases}$ , điều kiện:  $\begin{cases} u \neq \pm 1 \\ v \neq \pm 1 \end{cases} (*)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=9 \\ 4(u^2+v^2-2) = u^2v^2 - u^2 - v^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=9 \\ u^2+v^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=9 \\ u+v=\pm 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v=3 \\ u=v=-3 \end{cases} (TM(*))$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình là  $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases}$ .

### Câu 3.

a. Ta có:  $y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$   
 $\Leftrightarrow (y^2 - 5y + 6) + 56 = (y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x$   
 $\Leftrightarrow (y-2)(y-3) + 56 = (y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x$   
 $\Leftrightarrow (y-2)(x^2 + yx - 4x - y + 3) = 56$   
 $\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56$

Nhận thấy  $(y-2) + (x-1) = x+y-3$ , nên ta phải phân tích số 56 thành tích của 3 số nguyên mà tổng 2 số đầu bằng 2 số còn lại.

Như vậy, ta có:

- $56 = 1.7.8 \Rightarrow (x; y) = (2; 9)$
- $56 = 7.1.8 \Rightarrow (x; y) = (8; 3)$
- $56 = (-8).1.(-7) \Rightarrow (x; y) = (-7; 3)$
- $56 = 1.(-8).(-7) \Rightarrow (x; y) = (2; -6)$
- $56 = (-8).7.(-1) \Rightarrow (x; y) = (-7; 9)$
- $56 = 7.(-8).(-1) \Rightarrow (x; y) = (8; -6)$

b. Giả sử đa thức  $P(x)$  có 1 nghiệm nguyên là a.

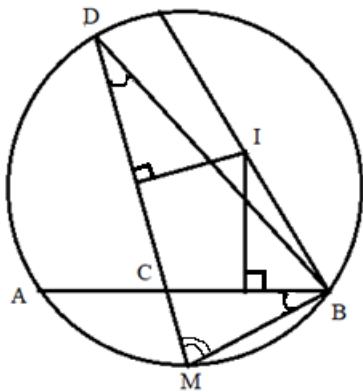
Ta có:  $P(2021) - 2024 = (2021 - a)Q(2021)$

Mà  $P(2021).P(2022) = 2023$  là số lẻ  $\Rightarrow P(2021), P(2022)$  là số lẻ

$$\Rightarrow (2021 - a) - (2022 - a) \text{ là số chẵn}$$

$\Rightarrow P(x) - 2024$  không có nghiệm nguyên.

1.



Ta có:  $\widehat{MBC} = \frac{1}{2}sd\widehat{AM}$

Mà:  $\widehat{AM} = \widehat{MB}$  ( vì M là điểm chính giữa cung  $\widehat{AB}$  )

Xét  $\triangle MBC$  và  $\triangle MDB$  có

$$\widehat{MBC} = \widehat{MDB}(cmt)$$
$$\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{BC}{BD} \text{ hay } MB.BD = MD.BC \text{ (dpcm)}.$$

Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD$ .

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 2\widehat{BDC} = 2\widehat{MBC}$  ( $\widehat{BIC}$  là góc ở tâm chắn  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{BDC}$  là góc nội tiếp chắn  $\widehat{BC}$  trong (I))

$$\Rightarrow \widehat{MBC} = \frac{\widehat{BIC}}{2}$$

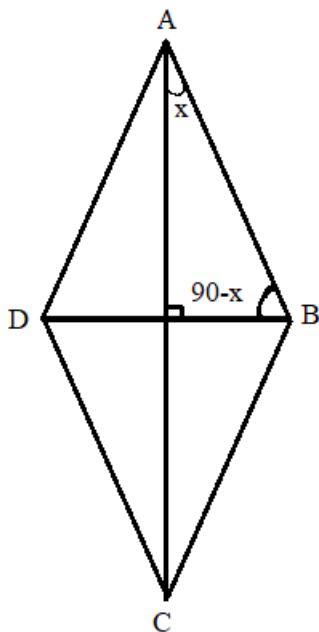
Ta có  $\triangle BIC$  cân tại I  $\Rightarrow \widehat{IBC} = \frac{180 - \widehat{BIC}}{2}$

$$\Rightarrow \widehat{MBC} + \widehat{IBC} = \frac{\widehat{BIC}}{2} + \frac{180 - \widehat{BIC}}{2} = 90^\circ$$

$\Rightarrow MB \perp BI \Rightarrow MB$  là tiếp tuyến của (I), và I  $\in$  đường thẳng vuông góc với MB.

Vì M, B cố định, nên đường thẳng vuông góc với MB cố định. Do đó, khi điểm D thay đổi thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên một đường thẳng cố định.

2.



Đặt  $\widehat{CAB} = x \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ - x$

Xét  $\triangle ABC$ , theo định lý sin, ta có:  $\frac{BC}{\sin \widehat{CAB}} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin x}$

Tương tự, xét  $\triangle ABD$ , có:  $\frac{AB}{2 \sin(90^\circ - x)} = 2R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos x}$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) \quad (0 < x \leq 90^\circ)$$

Đặt  $\sin x = t \quad (0 < t < 1)$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{2t}{2(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = 2 \text{ (dpcm)}.$$

**Câu 5.**

Ta có:  $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$

$$\Leftrightarrow P = \frac{a}{2b+c} + 1 + \frac{2b}{a+c} + 1 + \frac{a^3+8b^3}{16c} - 2$$

$$\Leftrightarrow P = (a+2b+c) \left( \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{a+c} \right) + \frac{a^3+8b^3}{16c} - 2$$

Ta có:  $(x-y)^2 \geq 0$  nên  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \text{ với } x, y > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Lại có:  $x^2 + y^2 - xy \geq xy$  nên  $(x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x+y) \Rightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$

$$\Rightarrow P \geq (a+2b+c) \frac{4}{2b+c+a+c} + \frac{a \cdot 2b(a+2b)}{16c} - 2$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{2(a+2b)}{a+2b+2c} + \frac{2ab(a+2b)}{16c}$$

Mặt khác:  $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$  nên  $(a-2b)^2 + c = 2ab$

$$\Rightarrow c \leq 2ab \Leftrightarrow 4a \cdot 2b = 4c \Rightarrow c \leq \frac{(a+2b)^2}{4}$$

Đặt  $t = a + 2b$ , ta có:

$$P \geq \frac{2t}{\frac{t^2}{2} + t} + \frac{2t}{16} = \frac{4}{t+2} + \frac{t}{16} = \frac{4}{t+2} + \frac{t+2}{16} - \frac{2}{16}$$

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{\frac{4}{t+2} \cdot \frac{t}{16}} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P_{\min} = \frac{7}{8} \text{ khi } \frac{4}{t+2} = \frac{t+2}{16} \Leftrightarrow t = 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=6 \\ a=2b \\ c=2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\frac{3}{2} \\ c=9 \end{cases}$$

Vậy GTNN của  $P = \frac{7}{8}$  khi  $a=3, b=\frac{3}{2}, c=9$ .