

Câu 1 (2,5 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$$

với a và b là các số thực dương khác nhau.a) Rút gọn biểu thức A .

$$\text{b) Tính giá trị của } B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) \text{ khi } a = 7 - 4\sqrt{3}$$

và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.**Câu 2 (2,0 điểm)** Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số).a) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Câu 3 (2,0 điểm)**a) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$ với $x \in \mathbb{R}$.b) Chứng minh rằng: $A = a^7 - a$ chia hết cho 7, với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Câu 4 (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm BC ; BE, CF là các đường cao (E, F là chân các đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại S . Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF , AS với (O) ($P \neq A$). Chứng minh rằng:

a) $MN \perp BF$.b) $AB \cdot CP = AC \cdot BP$.c) $\widehat{CAM} = \widehat{BAP}$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$ với a và b là các số thực dương khác nhau.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng: $A = a^7 - a$ chia hết cho 7, với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm BC ; BE, CF là các đường cao (E, F là chân các đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại S . Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF , AS với (O) ($P \neq A$). Chứng minh rằng:

a) $MN \perp BF$.

b) $AB.CP = AC.BP$.

c) $\widehat{CAM} = \widehat{BAP}$.

===== **Hết** =====

Hướng dẫn giải:

Bài 1. (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a}$ với a và b là các số thực dương khác nhau.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của $B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right)$ khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Với a, b là các số thực dương khác nhau, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) - \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{b-a} \\ &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right) + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} : \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{a - \sqrt{ab} - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} : \frac{a + \sqrt{ab} - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{-\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{-(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $A = 0$.

b) Theo a), ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{a}{b-a} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a}{a+b+2\sqrt{ab}} \right) = \frac{-\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

Khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$ thỏa mãn a, b là các số thực dương khác nhau, ta có:

$$\sqrt{a} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3};$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3};$$

$$\Rightarrow B = \frac{-2 + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}} = \frac{-4}{-2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

Vậy $B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi $a = 7 - 4\sqrt{3}$ và $b = 7 + 4\sqrt{3}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm m để biểu thức $M = \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ (m là tham số) (1).

a) Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt dương thì:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \frac{-b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2 - 1(m-2) > 0 \\ 2m > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 2 > 0 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \\ M > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Vậy $m > 2$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt dương.

b) Phương trình (1) có $\Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ với mọi $m \Rightarrow$ (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 với mọi m , theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= \frac{-2022}{x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2} = \frac{-2022}{(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \frac{-2022}{(2m)^2 - 8(m-2)} = \frac{-2022}{4m^2 - 8m + 16} \\ &= \frac{-2022}{4(m-1)^2 + 12} \geq \frac{-2022}{12} = \frac{-337}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}M = \frac{-337}{2}$ khi $m = 1$.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng: $A = a^7 - a$ chia hết cho 7, với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

a) ĐKXD: $0 \leq x \leq 1$.

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x} \geq 0 \\ b = \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + ab = 1 \\ (a+b)^2 - 2ab = 1 \end{cases};$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} S = a + b \geq 0 \\ P = ab \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S + P = 1 \\ S^2 - 2P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S + 2P = 2 \\ S^2 - 2P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 3 = 0 \\ P = 1 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 0 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} S = -3 \\ P = -4 \end{cases} (KTM) \end{cases}.$$

Với $S = 1; P = 0$ ta có $\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Rightarrow a, b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy $a = 0; b = 1$ hoặc $a = 1; b = 0$;

Với $a = 0; b = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{1-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn);

Với $a = 1; b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn);

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{0; 1\}$.

b) Với mọi $a \in \mathbb{Z}$ ta có: $A = a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3 - 1)(a^3 + 1)$.

Nếu $a \vdots 7 \Rightarrow A \vdots 7$;

Nếu a không chia hết cho 7 thì $a \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 6 \pmod{7} \Rightarrow a^3 \equiv 1, 6 \pmod{7} \Rightarrow a^3 - 1 \vdots 7$ hoặc $a^3 + 1 \vdots 7 \Rightarrow A \vdots 7$.

Vậy $A \vdots 7$ với mọi $a \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. (3,5 điểm)

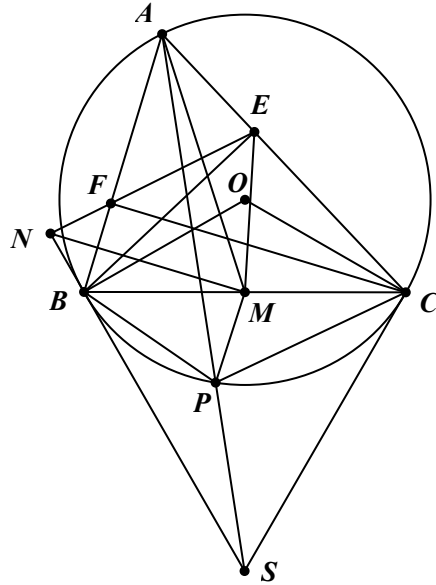
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , M là trung điểm BC ; BE, CF là các đường cao (E, F là chân các đường cao). Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại S . Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BS với EF , AS với (O) ($P \neq A$). Chứng minh rằng:

a) $MN \perp BF$.

b) $AB \cdot CP = AC \cdot BP$.

c) $\widehat{CAM} = \widehat{BAP}$.

Lời giải



a) $MN \perp BF$.

Ta có $\triangle BEC$ vuông tại E có EM là trung tuyến $\Rightarrow EM = \frac{BC}{2} = MB = MC \Rightarrow \triangle MEC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{ACB}$;

Tứ giác $BFEC$ có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \widehat{FEA} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{FEC}$) ;

$$\Rightarrow \widehat{MEN} = 180^\circ - (\widehat{MEC} + \widehat{FEA}) = 180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC}) = \widehat{BAC} \text{ (tổng ba góc trong } \triangle ABC);$$

Ta lại có $\widehat{BAC} = \widehat{CBS}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\widehat{BC}$)
 $\Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{CBS} (= \widehat{BAC})$;

Mà $\widehat{MBN} + \widehat{CBS} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) $\Rightarrow \widehat{MEN} + \widehat{MBN} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BMEN$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BEN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BN}$) ;

Vì $\widehat{BEN} = \widehat{BCF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BF}$) $\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{BCF} (= \widehat{BEN})$, hai góc này lại ở vị trí đồng vị nên $MN \parallel CF$.

Do theo đầu bài ta có $CF \perp BF \Rightarrow MN \perp BF$.

b) $AB \cdot CP = AC \cdot BP$.

Xét $\triangle SBP$ và $\triangle SAB$ có:

$\hat{S}$ chung;

$$\widehat{SBP} = \widehat{SAB} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn } \widehat{BP}) ;$$

$$\Rightarrow \triangle SBP \sim \triangle SAB (g.g) \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{SB}{SA} \quad (1) ;$$

Xét $\triangle SCP$ và $\triangle SAC$ có:

$\hat{S}$ chung;

$$\widehat{SCP} = \widehat{SAC} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn } \widehat{CP}) ;$$

$$\Rightarrow \Delta SCP \sim \Delta SAC (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{AC} = \frac{SC}{SA} \quad (2);$$

Mà theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có $SB = SC$ (3);

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có: } \frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC} \Leftrightarrow AB.CP = AC.BP.$$

$$\text{c) } \widehat{CAM} = \widehat{BAP}.$$

Vận dụng định lý Ptolemy, ta có tứ giác $ABPC$ nội tiếp $(O) \Rightarrow AP.BC = AB.CP + AC.BP$;

Theo câu b) thì $AB.CP = AC.BP \Rightarrow AP.BC = 2BP.AC \Rightarrow AP.2CM = 2BP.AC$

$$\Rightarrow AP.CM = BP.AC \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CM};$$

Xét ΔBPA và ΔMCA có:

$$\widehat{BPA} = \widehat{MCA} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AB} \text{)}; \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CM} \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\Rightarrow \Delta BPA \sim \Delta MCA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BAP}.$$

===== **Hết** =====