

**Bài I. (3,0 điểm)**

1. Tính giá trị của biểu thức  $P = x^{2022} - 10x^{2021} + x^{2020} + 2021$  tại  $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ .
2. Giải phương trình:  $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} + 4$ .
3. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 3x = y^3 - 8 \\ x^2 + y^2 = y + 2 \end{cases}$$

**Bài II. (3,0 điểm)**

1. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2 - x$ .  
Gọi  $A, B$  là hai giao điểm của đường thẳng  $(d)$  với parabol  $(P)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  nằm trên trục hoành sao cho chu vi tam giác  $MAB$  nhỏ nhất.
2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  sao cho phương trình  $x^2 - 2x - 2m|x - 1| + 2 = 0$  vô nghiệm.
3. Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thay đổi thỏa mãn  $abc = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$ .

**Bài III. (1,0 điểm)**

Cho  $m, n$  là các số nguyên dương sao cho  $m^2 + n^2 + m$  chia hết cho  $mn$ . Chứng minh rằng  $m$  là số chính phương.

**Bài IV. (3,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AC < AB$ ) có đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $AH$  ( $D$  khác  $A$  và  $H$ ). Đường thẳng  $BD$  cắt đường tròn tâm  $C$  bán kính  $CA$  tại  $E$  và  $F$  ( $F$  nằm giữa  $B$  và  $D$ ). Qua  $F$  vẽ đường thẳng song song với  $AE$  cắt hai đường thẳng  $AB$  và  $AH$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ .

- a) Chứng minh  $BH \cdot BC = BE \cdot BF$ .
- b) Chứng minh  $HD$  là tia phân giác của góc  $\widehat{EHF}$ .
- c) Chứng minh  $F$  là trung điểm  $MN$ .

HẾT

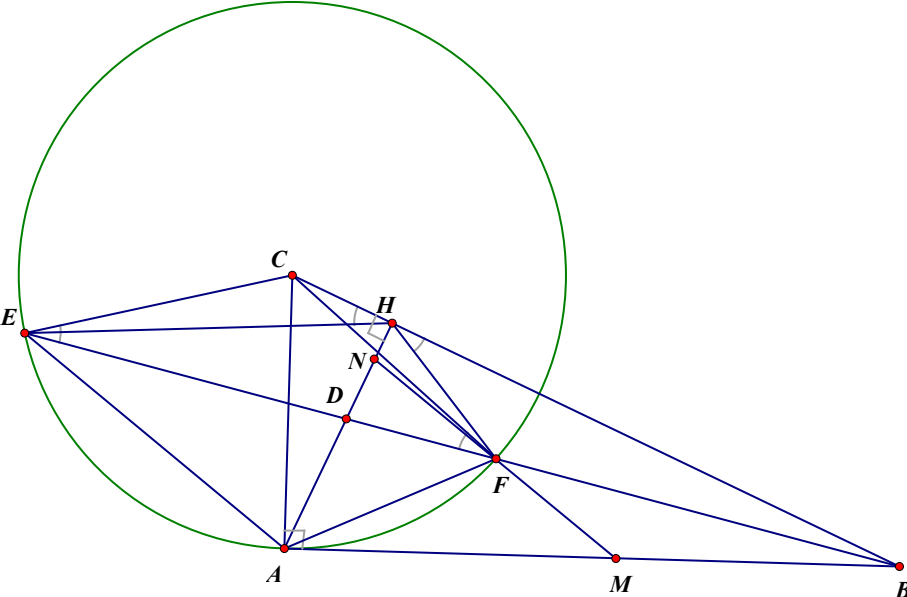
*Thí sinh được sử dụng các loại máy tính cầm tay do Bộ Giáo dục và Đào tạo cho phép.  
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Đáp án và thang điểm:

| Bài                        | Nội dung                                                                                                                                                   | Điểm       |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I</b><br><b>(3,0 đ)</b> | <b>1.</b> Tính giá trị của biểu thức $P = x^{2022} - 10x^{2021} + x^{2020} + 2021$ tại $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ .             | <b>1,0</b> |
|                            | Ta có: $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$                  | 0,25       |
|                            | $= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}$ .                                                                                                          | 0,25       |
|                            | Suy ra: $(x - 5)^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 1 = 0$ .                                                                                                   | 0,25       |
|                            | Do đó, $P = x^{2020}(x^2 - 10x + 1) + 2021 = 2021$ .                                                                                                       | 0,25       |
|                            | <b>2.</b> Giải phương trình: $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} + 4$ .                                                                      | <b>1,0</b> |
|                            | Điều kiện: $x \geq 1$ . Đặt $t = \sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}$ ( $t \geq \sqrt{2}$ ).                                                                       | 0,25       |
|                            | Suy ra: $t^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 1}$ .                                                                                                                     | 0,25       |
|                            | Phương trình thành: $\frac{t^2}{2} = t + 4 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (nhận) hoặc $t = -2$ (loại).                            |            |
|                            | Khi đó, $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 8 - x$                                                                           | 0,25       |
|                            | $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 1 = 64 - 16x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{65}{16}$ (nhận).                                 | 0,25       |
|                            | Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{65}{16} \right\}$ .                                                                                 |            |
|                            | <b>3.</b> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x = y^3 - 8 & (1) \\ x^2 + y^2 = y + 2 & (2) \end{cases}$                                            | <b>1,0</b> |
|                            | Lấy phương trình (2) nhân 3 hai vế cộng với phương trình (1) ta được:<br>$(x + 1)^3 = (y - 1)^3 \Leftrightarrow x + 1 = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 2$ . | 0,25       |
|                            | Thế vào phương trình (2) ta được: $x^2 + (x + 2)^2 = (x + 2) + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0$                                                            | 0,25       |
|                            | $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ hoặc $x = 0$ .                                                                                                          | 0,25       |
|                            | • <u>TH1</u> : $x = 0 \Rightarrow y = 2$ .<br>• <u>TH2</u> : $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ .                                              | 0,25       |
|                            | Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{ (0; 2), \left( -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$ .                                           |            |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>II</b><br><b>(3,0 đ)</b> | 1. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy$ , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2 - x$ . Gọi $A, B$ là hai giao điểm của đường thẳng $(d)$ với parabol $(P)$ . Tìm tọa độ điểm $M$ nằm trên trục hoành sao cho chu vi tam giác $MAB$ nhỏ nhất.                                                                                                     | <b>1,0</b> |
|                             | Phương trình hoành độ giao điểm của $(P)$ và $(d): x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$ .<br>Do đó không mất tính tổng quát giả sử $A(1;1), B(-2;4)$ .                                                                                                                                                                                       | 0,25       |
|                             | Do $AB$ không đổi nên chu vi $\Delta MAB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA + MB$ nhỏ nhất.<br>Gọi $A'$ là điểm đối xứng với $A$ qua trục hoành $\Rightarrow A'(1;-1)$ .<br>Ta có: $MA = MA' \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ .<br>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A', M, B$ thẳng hàng<br>$\Leftrightarrow M$ là giao điểm của $A'B$ và trục $Ox$ . | 0,25       |
|                             | Phương trình đường thẳng $A'B$ có dạng: $y = ax + b$ .<br>Ta có: $\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A'B: y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}.$                                                                                                   | 0,25       |
|                             | Từ đó tọa độ giao điểm của $A'B$ và $Ox$ là $M\left(\frac{2}{5}; 0\right)$ .<br>Vậy chu vi $\Delta MAB$ nhỏ nhất khi $M\left(\frac{2}{5}; 0\right)$ .                                                                                                                                                                                                    | 0,25       |
|                             | 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ sao cho phương trình $x^2 - 2x - 2m x - 1  + 2 = 0$ vô nghiệm.                                                                                                                                                                                                                                                | <b>1,0</b> |
|                             | Đặt $t =  x - 1  \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 1$ . Phương trình thành: $t^2 - 2mt + 1 = 0$ . (*)                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25       |
|                             | Phương trình đã cho vô nghiệm khi:<br><u>TH1</u> : Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$ . (1)                                                                                                                                                                                                   | 0,25       |
|                             | <u>TH2</u> : Phương trình (*) có 2 nghiệm $t_1 \leq t_2 < 0$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 2m < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \vee m \leq -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1. (2)$                       | 0,25       |
|                             | Kết hợp (1) và (2) ta được $m < 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25       |
|                             | <b>Cách giải khác:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |
|                             | Đặt $t =  x - 1  \geq 0 \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 1$ . Phương trình thành: $t^2 - 2mt + 1 = 0$ . (*)                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25       |
|                             | Ta tìm $m$ sao cho phương trình đã cho có nghiệm<br>$\Leftrightarrow \text{phương trình (*) có 2 nghiệm } t_1 \geq t_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$                                                                                                                                          | 0,25       |

|                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                              | $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 2m \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \vee m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$                                                                                                                                            | 0,25       |
|                              | Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow m < 1$ .                                                                                                                                                                                                                   | 0,25       |
|                              | <b>3.</b> Cho $a, b, c$ là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $abc = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$ .                                                                                                                                   | <b>1,0</b> |
|                              | Ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} = \frac{1}{(a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$ .                                                                                                                                                                | 0,25       |
|                              | Tương tự: $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}; \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ac + a + 1}$ .<br>Suy ra: $M \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$ .                                                     | 0,25       |
|                              | Thay $c = \frac{1}{ab}$ ta được: $M \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{ab + b + 1} + \frac{b}{ab + b + 1} \right) = \frac{1}{2}$ .                                                                                                                                                                         | 0,25       |
|                              | Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ . Vậy $\text{Max} M = \frac{1}{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25       |
| <b>III</b><br><b>(1,0 đ)</b> | Cho $m, n$ là các số nguyên dương sao cho $m^2 + n^2 + m$ chia hết cho $mn$ . Chứng minh rằng $m$ là số chính phương.                                                                                                                                                                                                                  | <b>1,0</b> |
|                              | Đặt $d = (m, n)$ . Khi đó, $m = dm_1, n = dn_1, (m_1, n_1) = 1, m_1, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ .                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25       |
|                              | Ta có: $mn \mid m^2 + n^2 + m$<br>$\Rightarrow d^2 m_1 n_1 \mid d^2 m_1^2 + d^2 n_1^2 + dm_1 \Rightarrow d \mid dm_1 n_1 \mid dm_1^2 + dn_1^2 + m_1 \Rightarrow d \mid m_1$ .                                                                                                                                                          | 0,25       |
|                              | Tương tự $m_1 \mid dm_1 n_1 \mid dm_1^2 + dn_1^2 + m_1 \Rightarrow m_1 \mid dn_1^2 \Rightarrow m_1 \mid d$ , vì $(m_1, n_1) = 1$ .                                                                                                                                                                                                     | 0,25       |
|                              | Do đó, $d = m_1 \Rightarrow m = d^2$ là số chính phương.                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25       |
| <b>IV</b><br><b>(3,0 đ)</b>  | Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ ( $AC < AB$ ) có đường cao $AH$ . Gọi $D$ là điểm nằm trên đoạn thẳng $AH$ ( $D$ khác $A$ và $H$ ). Đường thẳng $BD$ cắt đường tròn tâm $C$ bán kính $CA$ tại $E$ và $F$ ( $F$ nằm giữa $B$ và $D$ ). Qua $F$ vẽ đường thẳng song với $AE$ cắt hai đường thẳng $AB$ và $AH$ lần lượt tại $M$ và $N$ . | <b>3,0</b> |
|                              |                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                 |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>a) Chứng minh <math>BH.BC = BE.BF</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                | <b>0,75</b> |
| Ta có: $\triangle BAF \sim \triangle BEA$ (g.g) vì có $\widehat{ABF}$ chung và $\widehat{BAF} = \widehat{AEB}$ (cùng chắn cung $\widehat{AF}$ ).                                                                                                                | 0,25        |
| Suy ra: $\frac{BA}{BE} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow BE.BF = BA^2$ .                                                                                                                                                                                              | 0,25        |
| Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông $ABC$ ta có: $BA^2 = BH.BC \Rightarrow BH.BC = BE.BF$ .                                                                                                                                                                 | 0,25        |
| <b>b) Chứng minh <math>HD</math> là tia phân giác của góc <math>\widehat{EHF}</math>.</b>                                                                                                                                                                       | <b>1,0</b>  |
| Ta có: $\triangle BHF \sim \triangle BEC$ (c.g.c) vì có $\widehat{HBF}$ chung và $\frac{BH}{BE} = \frac{BF}{BC}$ (suy từ câu a).                                                                                                                                | 0,25        |
| Suy ra: $\widehat{BHF} = \widehat{BEC}$ (1) $\Rightarrow$ tứ giác $EFHC$ nội tiếp đường tròn.                                                                                                                                                                   | 0,25        |
| Do đó, $\widehat{EHC} = \widehat{EFC}$ (cùng chắn cung $\widehat{EC}$ )<br>$= \widehat{CEF}$ (do $\triangle CEF$ cân tại $C$ ). (2)                                                                                                                             | 0,25        |
| Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{FHB} = \widehat{EHC}$<br>$\Rightarrow \widehat{DHE} = \widehat{DHC} - \widehat{EHC} = 90^\circ - \widehat{EHC} = \widehat{DHB} - \widehat{FHB} = \widehat{DHF}$ .<br>Do đó, $HD$ là tia phân giác của góc $\widehat{EHF}$ . | 0,25        |
| <b>c) Chứng minh <math>F</math> là trung điểm <math>MN</math>.</b>                                                                                                                                                                                              | <b>1,0</b>  |
| Vì $MF \parallel AE$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{MF}{AE} = \frac{BF}{BE}$ . (3)                                                                                                                                                                       | 0,25        |
| Vì $NF \parallel AE$ nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{NF}{AE} = \frac{DF}{DE}$ . (4)                                                                                                                                                                       | 0,25        |
| Xét $\triangle EHF$ có $HD \perp HB$ và $HD$ là tia phân giác trong của góc $\widehat{EHF}$ nên $HB$ là tia phân giác ngoài của góc $\widehat{EHF} \Rightarrow \frac{BF}{BE} = \frac{HF}{HE} = \frac{DF}{DE}$ . (5)                                             | 0,25        |
| Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{MF}{AE} = \frac{NF}{AE} \Rightarrow MF = NF \Rightarrow F$ là trung điểm $MN$ .                                                                                                                                             | 0,25        |

----- HẾT -----