

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1: (2,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1})}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)
- b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Câu 2: (1,0 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = (2-2m)x + m$ (m là tham số). Chứng

minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, hai

điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng KH.

Câu 3: (2,0 điểm)

- a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$.
- b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-xy-2=0 \\ x^2-y^2+2x^2y+2xy^2+1=0 \end{cases}$.

Câu 4: (2,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD tâm O, điểm E nằm trên đoạn thẳng OB (E khác O, B), H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AE. Gọi F là giao điểm của AC và DH.

- a) Chứng minh HD là tia phân giác của góc AHC.
- b) Chứng minh diện tích hình vuông ABCD bằng hai lần diện tích tứ giác AEFD.

Câu 5: (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D.

- a) Chứng minh tứ giác ODFE nội tiếp đường tròn.
- b) Gọi K là giao điểm của AH và EF, I là trung điểm của AH. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C). Chứng minh CI vuông góc với KM.

Câu 6: (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $H = \frac{x^2}{9z + zx^2} + \frac{y^2}{9x + xy^2} + \frac{z^2}{9y + yz^2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (2,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x\left(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\right)}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)
- b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Lời giải

- a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{8+x\left(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\right)}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)}$ (với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$)

Với $x > 1, x \neq 4, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{8+x\left(1+\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}\right)}{(x-4)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{x-3\sqrt{x}}{2(x-\sqrt{x}-6)} \\ &= \frac{8+x\left(1+\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}\right)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{8+x(1+|\sqrt{x}-1|)}{(\sqrt{x}-2)(x\sqrt{x}+8)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{8+x\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(x\sqrt{x}+8)} + \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}+2)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+4}{2(x-4)} \end{aligned}$$

- b) Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $pq = r + 1$ và $2(p^2 + q^2) = r^2 + 1$.

Đặt $\begin{cases} S = p + q \\ P = p \cdot q \end{cases}$ ta có hệ:

$$\begin{cases} P = r + 1 \\ 2(S^2 - 2P) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ 2(S^2 - 2P) = r^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S^2 = \frac{r^2 + 4r + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = r + 1 \\ S = \sqrt{\frac{r^2 + 4r + 5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } p, q, r \text{ là ba số nguyên tố nên ta có: } & \begin{cases} r = 5 \\ S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ p + q = 5 \\ p \cdot q = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ q = 5 - p \\ p \cdot (5 - p) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ q = 5 - p \\ p^2 - 5p + 6 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ p = 2 \text{ hoặc } \\ q = 3 \end{cases} \begin{cases} r = 5 \\ p = 3 \\ q = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 2: (1,0 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) $y = (2 - 2m)x + m$ (m là tham số). Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB, hai điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng HK.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\begin{aligned} x^2 &= (2 - 2m)x + m \\ \Leftrightarrow x^2 - (2 - 2m)x - m &= 0 \quad (1) \\ \Delta &= (2 - 2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 4m^2 - 4m + 4 = (2m + 1)^2 + 3 > 0 \quad \forall m \end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của m .

Với mọi m , theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2 - 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m \end{cases}$$

$$\text{Vì } M\left(\frac{1}{2}; 1\right) \text{ là trung điểm của đoạn thẳng AB nên } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 - 2m}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Thay } m = \frac{1}{2} \text{ vào (1) ta có phương trình: } x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Vì H, K là hình chiếu của A, B lên trục hoành nên } \Rightarrow H\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; 0\right), K\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow HK = \left| \frac{1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-xy-2=0 \\ x^2-y^2+2x^2y+2xy^2+1=0 \end{cases}$.

Lời giải

a) Giải phương trình $(x-1)\sqrt{7-2x} = x^2 - 3x + 2$. Điều kiện: $x \leq \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{7-2x} = (x-1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{7-2x} - (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{7-2x} - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{7-2x} = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ 7-2x = (x-2)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S = \{1; 3\}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-xy-2=0 & (1) \\ x^2-y^2+2x^2y+2xy^2+1=0 & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta có: $x+2y-xy-2=0$

$$\Leftrightarrow x(1-y) - 2(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) - 2(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Với $x=2$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$4 - y^2 + 8y + 4y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 8y + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

Với $y = 1$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$x^2 - 1 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

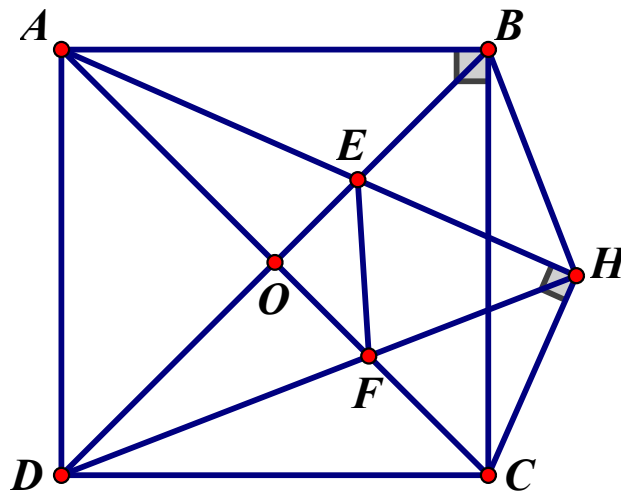
Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) \in \left\{ (2; -1); \left(2; -\frac{5}{3}\right); (0; 1); \left(-\frac{2}{3}; 1\right) \right\}$

Câu 4: (2,0 điểm).

Cho hình vuông ABCD tâm O, điểm E nằm trên đoạn thẳng OB (E khác O, B), H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AE. Gọi F là giao điểm của AC và DH.

- Chứng minh HD là tia phân giác của góc AHC.
- Chứng minh diện tích hình vuông ABCD bằng hai lần diện tích tứ giác AEFD.

Lời giải



- Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông)

$$\widehat{AHC} = 90^\circ \text{ (H là hình chiếu của C trên AE)}$$

Xét tứ giác ADCH có: $\widehat{ADC} + \widehat{AHC} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác ADCH nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DHC} = 45^\circ \text{ (cùng chắn cung CD) mà } \widehat{AHD} + \widehat{DHC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AHD} = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ HD là tia phân giác của góc AHC.

- Xét tứ giác OEHC có: $\widehat{EOC} + \widehat{EHC} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác OEHC nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{AEO} = \widehat{ACH} \text{ (góc ngoài bằng góc đối trong)} \quad (1)$$

Tứ giác ADCH nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ACH}$ (cùng chắn cung AH) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED} = \widehat{ADF}$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FAD$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \widehat{FAD} (= 45^\circ) \\ \widehat{AED} = \widehat{ADF} (cmt) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle FAD (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{DE} \Leftrightarrow AF \cdot DE = AD^2$$

$$\text{Ta có: } S_{AEFD} = \frac{1}{2} AF \cdot DE = \frac{1}{2} AD^2 = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

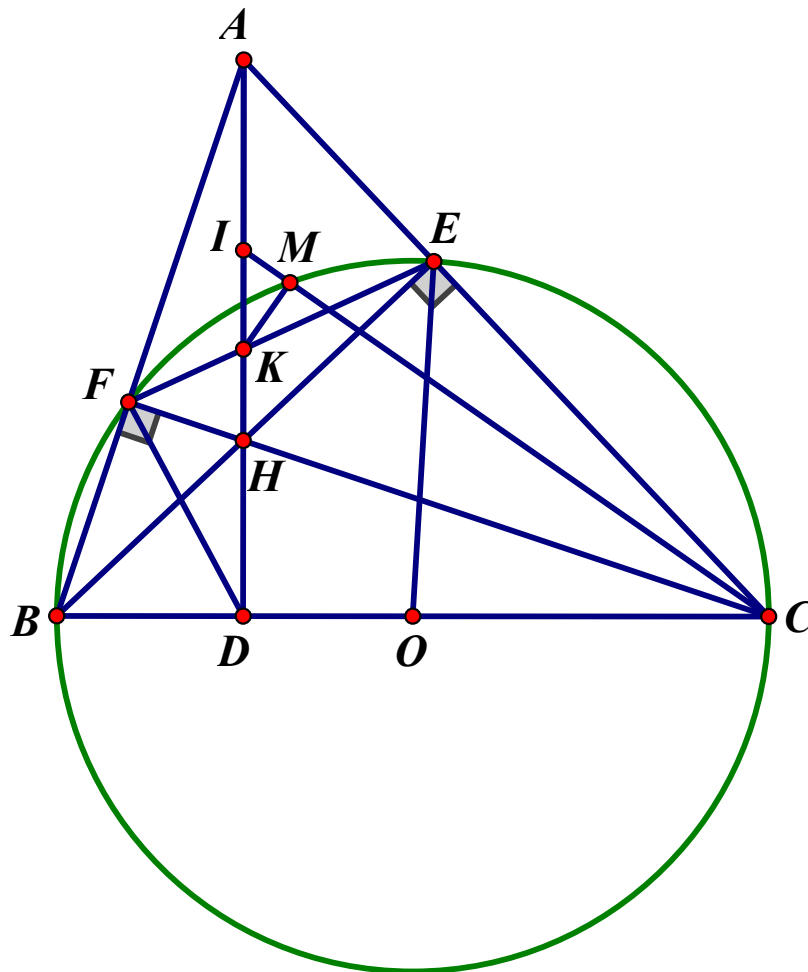
Câu 5: (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E.

Gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt BC tại D.

- Chứng minh tứ giác ODFE nội tiếp đường tròn.
- Gọi K là giao điểm của AH và EF, I là trung điểm của AH. Đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M (M khác C). Chứng minh CI vuông góc với KM.

Lời giải



- Ta có $\widehat{BFC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác ABC có: BE và CF là 2 đường cao cắt nhau tại H $\Rightarrow$ H là trực tâm tam giác ABC.

$\Rightarrow AH \perp BC$ tại D.

Ta có tứ giác BCEF nội tiếp (O) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{OCE}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Xét tứ giác ACDF có:

$$\widehat{ADC} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{AFC} = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow$ tứ giác ACDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{OCE}$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Xét tam giác BEC vuông tại E có EO là trung tuyến

$$\Rightarrow EO = \frac{1}{2} BC = CO = BO \text{ (định lý đường trung tuyến của tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OEC} \Rightarrow \widehat{COE} = 180^\circ - 2\widehat{OCE}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{AFE} = \widehat{OCE} \text{ (cmt)} \\ \widehat{BFD} = \widehat{OCE} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{COE} = 180^\circ - \widehat{AFE} - \widehat{BFD} = \widehat{EFD}$$

Xét tứ giác ODFE có $\widehat{COE} = \widehat{EFD}$ (cmt)

Mà hai góc ở vị trí góc ngoài và góc đối trong $\Rightarrow$ tứ giác ODFE nội tiếp.

b) Xét tam giác AEH vuông tại E có EI là trung tuyến

$$\Rightarrow EI = \frac{1}{2} AH = AI = HI \text{ (định lý đường trung tuyến của tam giác vuông)}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAE} = \widehat{IEA}, \text{ có } \widehat{OCE} = \widehat{OEC} \text{ (cmt) và } \widehat{IAE} \text{ phụ } \widehat{OCE} \Rightarrow \widehat{IEA} \text{ phụ } \widehat{OEC} \Rightarrow \widehat{OEI} = 90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{OFI} = 90^\circ$

Xét tứ giác OEIF có $\widehat{OEI} + \widehat{OFI} = 180^\circ$

Mà hai góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác OEIF nội tiếp.

Ta có tứ giác ODFE nội tiếp (cmt), tứ giác OEIF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ 5 điểm O, D, F, I, E cùng thuộc đường tròn đường kính ID.

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DIE} \text{ chung} \\ \widehat{IDK} = \widehat{IDE} (= \widehat{ECF}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IEK \sim \triangle IDE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IK}{IE} \Leftrightarrow IE^2 = ID.IK \text{ (1)}$$

Xét $\triangle IEM$ và $\triangle ICE$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ICE} \text{ chung} \\ \widehat{IEM} = \widehat{ICE} \left(= \frac{1}{2} \text{ số cung } EM \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IEM \sim \triangle ICE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{IM}{IE} \Leftrightarrow IE^2 = IC.IM \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow IK.ID = IC.IM \Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IC}{ID}$$

Xét $\triangle IMK$ và $\triangle IDC$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DIC} \text{ chung} \\ \frac{IK}{IM} = \frac{IC}{ID} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle IMK \sim \triangle IDC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{IMK} = \widehat{IDC} \text{ mà } \widehat{IDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IMK} = 90^\circ \Rightarrow CI \perp KM$$

Câu 6: (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } H = \frac{x^2}{9z + zx^2} + \frac{y^2}{9x + xy^2} + \frac{z^2}{9y + yz^2}.$$

Lời giải

$$\text{Theo đề ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c \text{ (} a, b, c > 0 \text{)} \Rightarrow a + b + c = 1$$

$$\text{Khi đó } H = \frac{c}{9a^2 + 1} + \frac{a}{9b^2 + 1} + \frac{b}{9c^2 + 1}$$

$$\text{Ta có: } \frac{c}{9a^2 + 1} \leq \frac{c(9a^2 + 1) - 9a^2c}{9a^2 + 1} = c - \frac{9a^2c}{9a^2 + 1}$$

$$\text{Vì } 9a^2 + 1 \geq 6a \Rightarrow c - \frac{9a^2c}{9a^2 + 1} \geq c - \frac{9a^2c}{6a} = c - \frac{3}{2}ac$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{a}{9b^2 + 1} \geq a - \frac{3}{2}ba; \frac{b}{9c^2 + 1} \geq b - \frac{3}{2}cb$$

$$\Rightarrow H \geq a + b + c - \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$$

$$\text{Mà } ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

$$\Rightarrow H \geq 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } H_{\min} = \frac{1}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = 3$$

-----☆☺☆-----