

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH  
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2021**

**Môn thi: TOÁN**

*(Dùng cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)  
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)*

**Bài 1 (2,5 điểm)**

Cho  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

- a) Tìm một đa thức bậc hai  $Q(x)$  với hệ số nguyên sao cho  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$ .  
b) Cho đa thức  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ . Tính giá trị của  $P(\alpha)$ .

**Bài 2 (3,0 điểm)**

Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính R. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác OBME. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác OBME nội tiếp.  
b)  $CD \cdot CE = CO^2 - R^2$ .  
c) M luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

**Bài 3 (2,0 điểm)**

Tìm tất cả các số nguyên dương  $N$  sao cho  $N$  có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng  $\frac{x^2+y}{xy+1}$  với  $x, y$  là hai số nguyên dương.

**Bài 4 (2,5 điểm)**

Cho  $a, b, c$  là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được ở dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên.

Biết rằng phương trình bậc hai  $ax^2 - bx + c = 0(1)$  có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

-----Hết-----

*Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

## LỜI GIẢI ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI

**Tập Thể Giáo Viên Nhóm Toán “Tiểu Học – THCS – THPT VIỆT NAM”**



|                            |                         |                          |
|----------------------------|-------------------------|--------------------------|
| <b>Tạ Thị Huyền Trang</b>  | <b>Nguyễn Trí Chính</b> | <b>Hoàng Dương</b>       |
| <b>Thắng Vũ</b>            | <b>Phạm Thụ</b>         | <b>Trần Lệnh Ánh</b>     |
| <b>Phạm Thu Hà</b>         | <b>Việt Dũng</b>        | <b>Lê Hợp</b>            |
| <b>Nguyễn Lan Anh</b>      | <b>Phạm Văn Tuấn</b>    | <b>Lê Hường</b>          |
| <b>Ngô Nguyễn Quốc Mẫn</b> | <b>Võ Quang Mẫn</b>     | <b>Trần Hùng Quân</b>    |
| <b>Lê Quỳnh Trang</b>      | <b>Lê Minh Đức</b>      | <b>Lê Thị Hoàng Hạnh</b> |
| <b>Bùi Quốc Trọng</b>      | <b>Phạm Duy Nguyên</b>  | <b>Nguyễn Hưng</b>       |
| <b>Nguyễn Minh Toàn</b>    |                         |                          |

### Bài 1. (2,5 điểm)

Cho  $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- a) Tìm một đa thức bậc hai  $Q(x)$  với hệ số nguyên sao cho  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$
- b) Cho đa thức:  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ . Tính giá trị của  $P(\alpha)$

### Lời giải

- a).Tìm một đa thức bậc hai  $Q(x)$  với hệ số nguyên sao cho  $\alpha$  là nghiệm của  $Q(x)$

**Cách 1:**

Có  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ .

Phương trình  $x^2 - x - 1 = 0$  có hệ số nguyên và có 2 nghiệm  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

Vậy  $Q(x) = x^2 - x - 1$  thỏa yêu cầu bài.

**Cách 2:**

Có  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , đặt  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Ta có  $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$

Phương trình có hệ số nguyên nhận  $\alpha$ ,  $\beta$  làm nghiệm là  $x^2 - x - 1 = 0$

Vậy  $Q(x) = x^2 - x - 1$  thỏa yêu cầu bài.

b)  $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1 = x^5 - x^4 - x^3 + x^3 - x + 1$

$P(x) = x^3(x^2 - x - 1) + x^3 - x^2 - x + x^2 + 1$

$P(x) = (x^2 - x - 1)(x^3 + x) + x^2 + 1$

$P(\alpha) = (\alpha^2 - \alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha) + \alpha^2 + 1$ .

$P(\alpha) = 0 + \alpha^2 + 1$  (Do  $\alpha$  là nghiệm của phương trình:  $x^2 - x - 1$ ).

Mà  $\alpha^2 + 1 = \alpha + 2$  nên

$P(\alpha) = \alpha^2 + 1 = \alpha + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ .

Vậy  $P(\alpha) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ .

## Bài 2. (3,0 điểm)

Cho  $A, B$  là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Giả sử  $C$  là điểm cố định trên tia đối của tia  $BA$ . Một cát tuyến thay đổi qua  $C$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $D$  và  $E$  ( $D$  nằm giữa  $C, E$ ). Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $BCD$  và  $ACE$  cắt nhau tại giao điểm thứ hai  $M$ . Biết rằng bốn điểm  $O, B, M, E$  tạo thành tứ giác  $OBME$ .

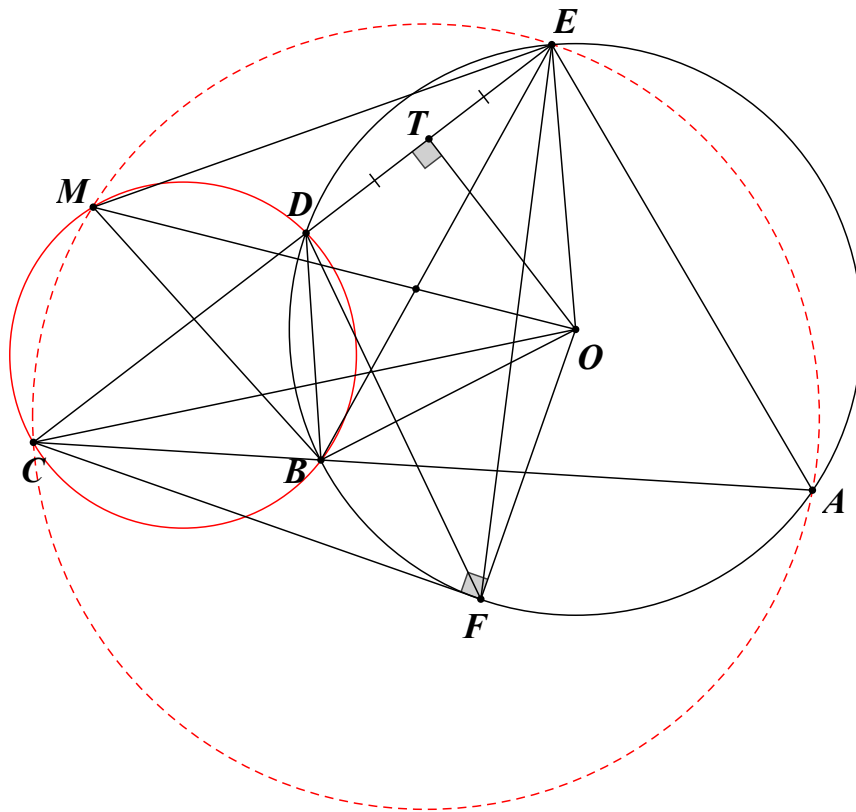
Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  $OBME$  nội tiếp.

b)  $CD \cdot CE = CO^2 - R^2$ .

c)  $M$  luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

**Lời giải**



a) Chứng minh tứ giác  $OBME$  nội tiếp.

$$\begin{aligned}\widehat{EOB} &= \widehat{BAE} = \widehat{BDC} = \widehat{BMC} = 2(\widehat{EMC} - \widehat{EMB}) \\ &= 2(180^\circ - \widehat{EAB} - \widehat{EMB}) \\ &= 360^\circ - \widehat{EOB} - 2\widehat{EMB}\end{aligned}$$

suy ra  $\widehat{EOB} + \widehat{EMB} = 180^\circ$  hay tứ giác  $OBME$  nội tiếp.

b) Chứng minh  $CD.CE = CO^2 - R^2$ .

### Cách 1.

Kẻ  $CF$  là tiếp tuyến của  $(O)$ , suy ra  $CF \perp OF \Rightarrow CF^2 = CO^2 - OF^2 = CO^2 - R^2$  (1)

Mặt khác:  $\Delta CDF \sim \Delta CFE$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CF^2 = CD.CE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $CD.CE = CO^2 - R^2$ .

### Cách 2.

Gọi  $T$  là trung điểm  $DE$ .

$$\begin{aligned} \text{C6 } CD.CE &= (CT - TD)(CT + TE), \quad TD = TE \\ &= CT^2 - TD^2 = CO^2 - OT^2 - TD^2 = CO^2 - OD^2 = CO^2 - R^2 \end{aligned}$$

c) Chứng minh  $M$  luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

$\widehat{OMC} = \widehat{OMB} + \widehat{BMC} = \widehat{OEB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$  hay  $M$  luôn di chuyển trên đường tròn đường kính  $OC$  cố định.

### Bài 3. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương  $N$  sao cho  $N$  có thể biểu diễn một cách duy nhất ở dạng

$$\frac{x^2 y + 1}{xy + 1} \text{ với } x, y \text{ là hai số nguyên dương.}$$

#### Lời giải

$$N = \frac{x^2 + y}{xy + 1} \Leftrightarrow x^2 - Nxy - N + y = 0 \Leftrightarrow x(Ny - x) = y - N \quad (1)$$

Với  $N = 1$  dễ thấy có vô số cách biểu diễn  $N$  theo  $x, y$

là các bộ số dạng  $(x, y) = (a, a + 1) \quad (a \in \mathbb{N}^*)$

Với  $N \geq 2$

$$\text{Nếu } y = N \Rightarrow x = N^2$$

$$\text{Nếu } y \neq N \text{ thì } (1) \Rightarrow y - N : x \Rightarrow |y - N| \geq x$$

suy ra trong hai số  $y, N$  có ít nhất một số lớn hơn  $x$

$$\Rightarrow Ny - x > 0 \Rightarrow y - N > 0 \Rightarrow y > N \Rightarrow y > x$$

$$\text{Từ } (1) \Rightarrow y - N : Ny - x \Rightarrow y - N \geq Ny - x \geq 2y - x \geq y + (y - x) \geq y \Rightarrow N \leq 0 \text{ (loại)}$$

Vậy với  $N \geq 2$  thì ta có một biểu diễn duy nhất ở dạng  $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$

**Cách khác.**

$$+) N = 1 \text{ có vô số bộ } (x, y) \text{ có dạng } (k, k + 1) \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ thỏa mãn } \frac{x^2 + y}{xy + 1} = N.$$

Suy ra  $N = 1$  loại

$$+) N \neq 1$$

$$x^2 + y : xy + 1$$

$$\Rightarrow y(x^2 + y) - x(xy + 1) : xy + 1 \Rightarrow y^2 - x : xy + 1$$

$$+) x < y \Rightarrow x^2 + y \leq xy + y < 2xy + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y \leq xy + xy = 2xy < 2xy + 2 \Rightarrow \frac{x^2 + y}{xy + 1} < 2 \Rightarrow N < 2 \text{ vô lý.}$$

$$+) x \geq y \Rightarrow -(xy + 1) < -x < y^2 - x < y^2 < xy + 1$$

$$\Rightarrow y^2 - x = 0 \Rightarrow x = y^2$$

$$\Rightarrow N = \frac{y^4 + y}{y^2 + 1} = y$$

$$\Rightarrow x = N^2$$

Với mọi  $N > 1$  thì cặp  $(N^2; N)$  là duy nhất

#### Bài 4. (2,5 điểm)

Cho  $a, b, c$  là ba số nguyên dương sao cho mỗi số trong ba số đó đều biểu diễn được dưới dạng lũy thừa của 2 với số mũ tự nhiên. Biết rằng phương trình bậc hai  $ax^2 - bx + c = 0$  (1) có cả hai nghiệm đều là số nguyên. Chứng minh rằng hai nghiệm của phương trình (1) bằng nhau.

#### Lời giải

##### Cách 1:

Đặt  $a = 2^k; b = 2^n; c = 2^m$  ( $k, m, n \in \mathbb{N}$ )

Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm nguyên của phương trình  $ax^2 - bx + c = 0$

Ta có  $ax_1^2 - bx_1 + c = 0 \Rightarrow c = x_1(b - ax_1) > 0 \Rightarrow c : x_1 \Rightarrow 2^m : x_1$  tương tự  $2^m : x_2$  (1)

Theo hệ thức Vi-et:  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2^{n-k} \\ x_1 \cdot x_2 = 2^{m-k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases}$  (2)

Từ (1); (2)  $\Rightarrow x_1; x_2$  là các lũy thừa với số mũ tự nhiên của 2.

Đặt  $x_1 = 2^p, x_2 = 2^q$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) không mất tính tổng quát giả sử  $p \geq q$ .

Khi đó  $x_1 + x_2 = 2^{n-k} \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} + 1) = 2^{n-k} \Rightarrow 2^{p-q} + 1 = 2^{n-k-q}$

Vì  $2^{p-q} + 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{n-k-q} \geq 2 \Rightarrow 2^{n-k-q}$  là số chẵn  $\Rightarrow 2^{p-q} + 1$  là số chẵn

$\Rightarrow 2^{p-q} = 1 \Rightarrow p - q = 0 \Leftrightarrow p = q \Rightarrow x_1 = x_2$  (đpcm).

