

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm).

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}}{x-1} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}+1} + 1$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 2$.

Câu II (2,0 điểm).

1. Cho hai điểm M, N thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ và có hoành độ lần lượt là $x_M = -2; x_N = 1$.

Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua hai điểm M, N .

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-4} = -5 \\ \frac{4}{x+1} + \frac{5}{y-4} = 23 \end{cases}.$$

Câu III (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 2m + 4 = 0$ (m là tham số).

1. Giải phương trình khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 6$.

Câu IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AC . Đường thẳng MN cắt cung nhỏ BC của đường tròn (O) tại P .

1. Chứng minh tứ giác $OMCN$ nội tiếp.
2. Gọi D là điểm bất kỳ trên cạnh AB (D khác A, B). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPD cắt cạnh BC tại điểm I khác B ; K là giao điểm của hai đường thẳng DI và AC . Chứng minh $PK \cdot PB = PC \cdot PD$.
3. Gọi G là giao điểm khác P của AP với đường tròn ngoại tiếp tam giác BPD , đường thẳng IG cắt AB tại E . Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\frac{AD}{AE}$ không đổi.

Câu V (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}.$$

----- Hết -----