SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

Đề chính thức

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT CHUYÊN
Năm học: **2021 – 2022**
Môn: **TOÁN** (*Chuyên Toán – Tin*) – Ngày: **11/06/2021**
Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(không kể thời gian phát đề)*

-------------------- oOo --------------------

Bài 1. (*2.0 điểm*)

1. Cho biểu thức: $A=\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$.

Tính giá trị biểu thức A với $x=\sqrt{\sqrt{2021}+2\sqrt{505}}$, $y=\sqrt{\sqrt{2021}-2\sqrt{505}}$.

2. Cho các số thực a, b, $c\neq 0$ và $a+b+c\neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^{2021}}+\frac{1}{b^{2021}}+\frac{1}{c^{2021}}=\frac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}$.

Bài 2. (*2.5 điểm*)

1. Cho tập hợp A gồm 21 số tự nhiên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 số bất kỳ lớn hơn tổng của 10 số còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A. Tìm các số còn lại của tập hợp A.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho x^2-x+13 là số chính phương.

Bài 3. (*1.5 điểm*)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{2xy-y}+2x+y=10\\ \sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}+2\sqrt{2x-1}=3\end{cases}$.

Bài 4. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, D là điểm bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P, Q (theo thứ tự P, M, N, Q). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh 4 điểm A, I, P, K nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{QA}{QB}=\frac{PD}{PK}$.

c) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh khi D di chuyển trên đoạn BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi.

Bài 5. (*1.0 điểm*)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+2b\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a^2+a^2b+\frac{9}{2}ab^2+(8+a)b^3}{ab}.$$

---------- ❧ **HẾT** ❧ ----------

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – CHUYÊN TOÁN TIN – BÌNH ĐỊNH 2021 – 2022

Bài 1. (*2.0 điểm*)

1. Cho biểu thức: $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$.

Tính giá trị biểu thức A với $x=\sqrt{\sqrt{2021}+2\sqrt{505}}$, $y=\sqrt{\sqrt{2021}-2\sqrt{505}}$.

2. Cho các số thực $a,\ b,\ c\neq 0$ và $a+b+c\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}=\dfrac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}\ (*)$.

1. Điều kiện: $x>0$; $y>0$ và $x\neq y$.

Ta có: $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right).\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y-x-2\sqrt{xy}-y}{x-y}.\dfrac{y-x}{xy}=\dfrac{4}{\sqrt{xy}}$.

Thay $x=\sqrt{\sqrt{2021}+2\sqrt{505}}$, $y=\sqrt{\sqrt{2021}-2\sqrt{505}}$ vào biểu thức đã thu gọn, ta được:

$$A=\frac{4}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2021}+2\sqrt{505}}.\sqrt{\sqrt{2021}-2\sqrt{505}}}}=\frac{4}{\sqrt{\sqrt{2021-4.505}}}=4.$$

Vậy $A=\dfrac{4}{\sqrt{xy}}$ (với $x>0$; $y>0$ và $x\neq y$) và $A=4$ khi $\begin{cases}x=\sqrt{\sqrt{2021}+2\sqrt{505}}\\ y=\sqrt{\sqrt{2021}-2\sqrt{505}}\end{cases}$.

2. Ta có: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0\Leftrightarrow\dfrac{b+c}{a(a+b+c)}+\dfrac{b+c}{bc}=0$.

$$\Leftrightarrow (b+c)\left(\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{bc}\right)=0$$

$\Leftrightarrow (b+c)(bc+a^2+ab+ca)=0$ (do $a,\ b,\ c\neq 0$ và $a+b+c\neq 0$)

$$\Leftrightarrow (b+c)(a+b)(c+a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\ b=-c\\ c=-a\end{array}\right.$$

• Với $a=-b$, suy ra: $\begin{cases}\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{b^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}=\dfrac{1}{a^{2021}}-\dfrac{1}{a^{2021}}+\dfrac{1}{c^{2021}}=\dfrac{1}{c^{2021}}\\ \dfrac{1}{a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}}=\dfrac{1}{a^{2021}-a^{2021}+c^{2021}}=\dfrac{1}{c^{2021}}\end{cases}$; do đó $(*)$ đúng.

• Tương tự trong hai trường hợp còn lại là: $b=-c$ và $c=-a$ thì $(*)$ cũng đúng.

Do đó bài toán được chứng minh.

Bài 2. (*2.5 điểm*)

1. Cho tập hợp A gồm 21 số tự nhiên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 số bất kỳ lớn hơn tổng của 10 số còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A. Tìm các số còn lại của tập hợp A.

2. Tìm tất cả các số nguyên dương x sao cho x^2-x+13 là số chính phương.

1. Giả sử $A=\{a_1;\ a_2;\ a_3;...;\ a_{21}\}$ với $a_1;\ a_2;\ a_3;...;\ a_{21}\in\mathbb{N}$ và $a_1<a_2<a_3<...<a_{21}$.

Từ đề, suy ra: $a_1+a_2+...+a_{11}>a_{12}+a_{13}+...+a_{21} \Leftrightarrow a_1>a_{12}-a_2+a_{13}-a_3+...+a_{21}-a_{11}$ (1).

Vì $a_1; a_2; a_3;...; a_{21}\in\mathbb{N}$ nên $a_{12}-a_2\geq 10$; $a_{13}-a_3\geq 10$; ... ; $a_{21}-a_{11}\geq 10$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $a_1>\underbrace{10+10+...+10}_{10 \text{ số } 10}=100$ mà a_1 là số nhỏ nhất trong các số của tập hợp A nên $a_1=101$ (3).

Từ (1) và (3), suy ra: $a_{12}-a_2+a_{13}-a_3+...+a_{21}-a_{11}<101$ (4).

Từ (2) và (4) suy ra: $a_{12}-a_2=a_{13}-a_3=...=a_{21}-a_{11}=10$ (5).

Ta có: $10=a_{12}-a_2=(a_{12}-a_{11})+(a_{11}-a_{10})+...+(a_3-a_2)\geq 10$.

$\Rightarrow a_{12}-a_{11}=a_{11}-a_{10}=...=a_3-a_2=1$ (6).

Vì $a_1=101$ mà $102\in A \Rightarrow a_2=102$ (7).

Từ (5), (6) và (7) suy ra $A=\{101;\ 102;\ 103;...;\ 121\}$.

2. Theo đề, đặt $x^2-x+13=a^2$ (với x, $a\in\mathbb{Z}^+$).

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+52=4a^2 \Leftrightarrow (2a)^2-(2x-1)^2=51 \Leftrightarrow (2a-2x+1)(2a+2x-1)=51$.

Vì x, $a\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow 2a-2x+1\in\mathbb{Z}$; $2a+2x-1\in\mathbb{Z}^+$ và $2a-2x+1<2a+2x-1$.

Do đó ta có bảng sau:

$2a+2x-1$	51	17
$2a-2x+1$	1	3
a	13	5
x	13	4
	thỏa	thỏa

Vậy số cần tìm là: $x\in\{4;13\}$.

Bài 3. *(1.5 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2\sqrt{2xy-y}+2x+y=10 & (1)\\ \sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}+2\sqrt{2x-1}=3 & (2)\end{cases}$.

Điều kiện: $x\geq\frac{1}{2}$; $y\geq 0$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{y}.\sqrt{2x-1}+y=9 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{y}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+\sqrt{y}=3$ (do $\sqrt{2x-1}+\sqrt{y}\geq 0$).

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=3-\sqrt{y}$ $(*)$.

Thay $\sqrt{2x-1}=3-\sqrt{y}$ vào (2) ta được:

$\sqrt{3y+4}-\sqrt{2y+1}+6-2\sqrt{y}=3 \Leftrightarrow 2\sqrt{y}-\sqrt{3y+4}+\sqrt{2y+1}-3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{y-4}{2\sqrt{y}+\sqrt{3y+4}}+\frac{2(y-4)}{\sqrt{2y+1}+3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y-4=0 & (3)\\ \frac{1}{2\sqrt{y}+\sqrt{3y+4}}+\frac{2}{\sqrt{2y+1}+3}=0 & (4)\end{array}\right.$$

- Từ (3) suy ra $y=4$ (thỏa), thay vào $(*)$ suy ra $\sqrt{2x-1}=1 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa).
- Nhận thấy $\text{VT}_{(4)}>0$ với mọi $x\geq\frac{1}{2}$; $y\geq 0 \Rightarrow$ phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(1;4)$.

Bài 4. (*3.0 điểm*)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, D là điểm bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và C). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại P, Q (theo thứ tự P, M, N, Q). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại I (khác B). Các đường thẳng DI và AC cắt nhau tại K.

a) Chứng minh 4 điểm A, I, P, K nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{PD}{PK}$.

c) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại E. Chứng minh khi D di chuyển trên đoạn BC thì tỉ số $\dfrac{CD}{CE}$ không đổi.

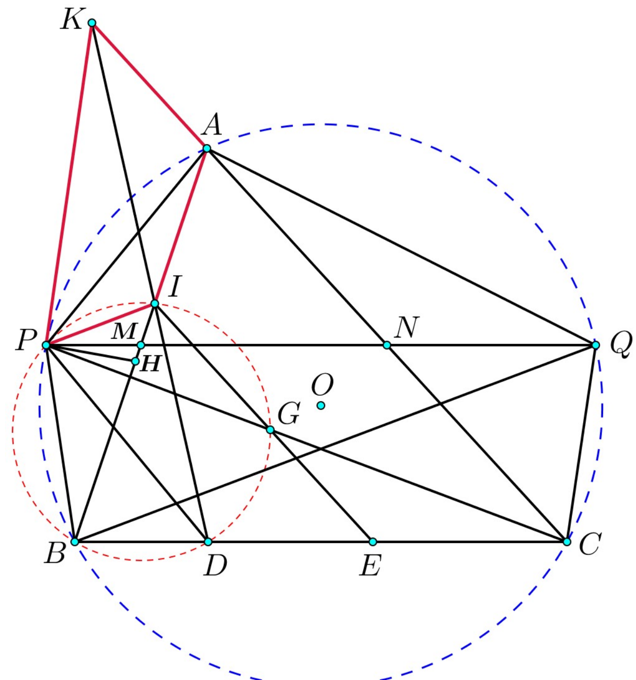
a) Vì tứ giác $APBC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PAC}+\widehat{PBC}=180^\circ$ (1).

Vì tứ giác $BDIP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PID}+\widehat{PBC}=180^\circ$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{PID}=\widehat{PAC}$.

Lại có: $\widehat{PID}+\widehat{PIK}=180^\circ$; $\widehat{PAC}+\widehat{PAK}=180^\circ$.

Do đó: $\widehat{PIK}=\widehat{PAK}$; mà hai góc này cùng nhìn cạnh PK $\Rightarrow$ tứ giác $AIPK$ nội tiếp hay 4 điểm A, I, P, K nằm trên 1 đường tròn.



b) Ta có: $\widehat{APK}=\widehat{AIK}=\widehat{BID}=\widehat{BPD}$.

• Xét ΔPBD và ΔPAK, ta có:

$\widehat{PBD}=\widehat{PAK}$ (cmt); $\widehat{APK}=\widehat{BPD}$ (cmt).

$\Rightarrow$ $\Delta PBD \,\#\, \Delta PAK$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PD}{PK}$ (3).

• Vì tứ giác $APBQ$ nội tiếp, suy ra:

$$\begin{cases}\dfrac{PB}{QA}=\dfrac{MP}{MA}\\[2mm] \dfrac{QB}{PA}=\dfrac{MB}{MP}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{PB}{QA}.\dfrac{QB}{PA}=1 \Rightarrow \dfrac{PB}{PA}=\dfrac{QA}{QB} \quad (4).$$

Từ (3) và (4), suy ra: $\dfrac{QA}{QB}=\dfrac{PD}{PK}$.

c) • Trên AB xác định điểm H sao cho $\widehat{APH}=\widehat{KPI}$.

Vì tứ giác $AIPK$ nội tiếp, nên $\widehat{KPI}=\widehat{BAC}$.

Lại có A, P và $\widehat{BAC}$ không đổi nên H là điểm cố định.

• Dễ dàng chứng minh được $\Delta KPI \,\#\, \Delta APH$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{KI}{AH}=\dfrac{KP}{AP}$ (5).

Dễ dàng chứng minh được $\Delta PKD \,\#\, \Delta PAB$ (g – g) $\Rightarrow \dfrac{KP}{AP}=\dfrac{KD}{AB}$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra: $\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{KI}{AH} \Rightarrow \dfrac{KD}{KI}=\dfrac{AB}{AH}$ (7).

• Ta có: $\widehat{PGI}=\widehat{PBI}=\widehat{PCA}$ nên $GI \,//\, AC$ hay $IE \,//\, AC$ $\Rightarrow \dfrac{CD}{CE}=\dfrac{KD}{KI}$ (8).

➢ Từ (7) và (8) suy ra $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{AB}{AH}$ mà $\dfrac{AB}{AH}$ không đổi nên $\dfrac{CD}{CE}$ không đổi.

Bài 5. (*1.0 điểm*)

Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a+2b\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{3a^2+a^2b+\frac{9}{2}ab^2+(8+a)b^3}{ab}.$$

Ta có: $P=\dfrac{3a^2+a^2b+\frac{9}{2}ab^2+(8+a)b^3}{ab}=\dfrac{3a}{b}+a+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{8b^2}{a}+b^2$

Theo đề $a+2b\geq 3 \;\Rightarrow\; 2b\geq 3-a \;\Rightarrow\; \dfrac{8b^2}{a}=\dfrac{4b.2b}{a}=\dfrac{4b(3-a)}{a}=\dfrac{12b}{a}-4b$.

Do đó: $P=\dfrac{3a}{b}+a+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{8b^2}{a}+b^2\geq\dfrac{3a}{b}+3-2b+\dfrac{9b}{2}+\dfrac{12b}{a}-4b+b^2=\dfrac{3a}{b}+\dfrac{12b}{a}+b^2-\dfrac{3b}{2}+3$

$$\geq 2.\sqrt{\frac{3a}{b}.\frac{12b}{a}}+\left(b-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\geq 12+\frac{39}{16}=\frac{231}{16}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a,\ b>0\\ \dfrac{3a}{b}=\dfrac{12b}{a}\\ a+2b=3\end{cases}\Leftrightarrow\ a=2b=\dfrac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{231}{16}$ khi $(a;b)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

---------- ☙ **CHÚC CÁC EM HỌC TỐT** ❧ ----------