

**Câu 1 (2,0 điểm)** Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $x^2 - 3x - 4 = 0$

b) 
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$$

**Câu 2 (2,0 điểm)** Cho biểu thức:

$$P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{3x + 2}{4 - x} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x \geq 0, x \neq 4.$$

a) Rút gọn P.

b) Tìm x để  $P = \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$

**Câu 3 (2,0 điểm)** Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P):  $y = 2x^2$  và đường thẳng (d):

$$y = (m + 1)x - m + 3 \text{ (m là tham số)}$$

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm A và B phân biệt với mọi giá trị của m

b) Gọi tọa độ điểm A và điểm B là A ( $x_1$ ;  $y_1$ ) và B( $x_2$ ;  $y_2$ ). Tìm m để  $2y_1 + 2y_2 = (m + 1)x_2 + 2x_1^2 + 8$

**Câu 4 (3,0 điểm)** Cho nửa đường tròn tâm O, bán kính R, đường kính AB, I là điểm cố định thuộc đoạn thẳng OB. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AB tại I, d cắt nửa đường tròn (O) tại K. Lấy điểm M bất kỳ thuộc cung nhỏ BK, tia BM cắt đường thẳng d tại điểm C, đoạn thẳng AM cắt đường thẳng d tại điểm N, AC cắt nửa đường tròn (O) tại D.

a) Chứng minh tứ giác BMNI là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh ba điểm B, N, D thẳng hàng và tính  $AD.AC + BM.BC$  theo R

c) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC. Chứng minh O' luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ KB

**Câu 5 (1,0 điểm):** Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn:  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

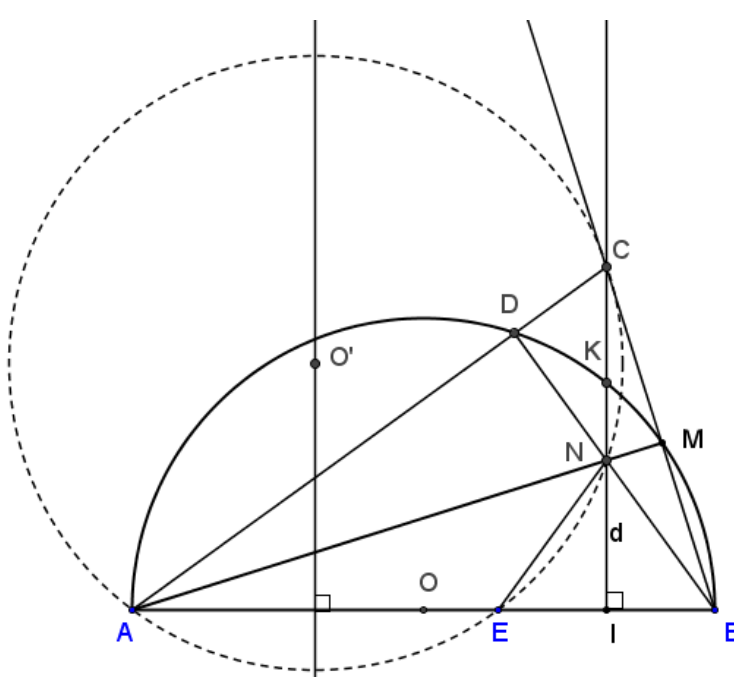
của biểu thức: 
$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}.$$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: ..... SBD.....

| Câu          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Biểu<br>điểm                                                                       |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Câu 1</b> | <p>a, Phương trình <math>x^2 - 3x - 4 = 0</math> là phương trình bậc hai có</p> <p><math>a - b + c = 0</math> nên phương trình có hai nghiệm là: <math>x_1 = -1</math>; <math>x_2 = \frac{-c}{a} = 4</math>.</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là: <math>S = \{-1; 4\}</math></p> <p><math>b, \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ x + 3y = -1 \end{cases}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ x + 3y = -1 \end{cases}</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}</math></p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: <math>(x; y) = (2; -1)</math></p>                                                                                                                              | <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <b>Câu 2</b> | <p>a) Với <math>x \geq 0, x \neq 4</math> ta có :</p> <p><math>P = \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{3x + 2}{4 - x} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}</math></p> <p><math>P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) - (3x + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}</math></p> <p><math>= \frac{x + 2\sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} - 3x - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}</math></p> <p><math>= \frac{-2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}</math></p> <p><math>= \frac{-2(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}</math></p> <p><math>= \frac{-2}{\sqrt{x} - 2}</math></p> <p>Kết luận :...</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>                                    |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                 |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|              | <p>b) Với <math>x \geq 0, x \neq 4</math> ta có:</p> $P = \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$ $\Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{5}{\sqrt{x} + 1}$ $\Rightarrow -2(\sqrt{x} + 1) = 5(\sqrt{x} - 2)$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{x} - 2 = 5\sqrt{x} - 10$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = 2 - 10$ $\Leftrightarrow -7\sqrt{x} = -8$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{8}{7}$ $\Leftrightarrow x = \frac{64}{49} \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$ <p>Vậy <math>x = \frac{64}{49}</math></p>                                                                              | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <b>Câu 3</b> | <p>Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:</p> $2x^2 = (m + 1)x - m + 3$ $\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 1)x + m - 3 = 0 \quad (1)$ <p>Phương trình trên là phương trình bậc hai có:</p> $\Delta = (m + 1)^2 - 4.2.(m - 3) = m^2 + 2m + 1 - 8m + 24$ $= m^2 - 6m + 25$ $= (m - 3)^2 + 16$ <p>Vì <math>(m - 3)^2 \geq 0 \forall m</math> nên <math>(m - 3)^2 + 16 \geq 16 &gt; 0 \forall m</math></p> <p>Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m</p> <p>Do đó đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
|              | <p>b) Vì <math>x_1, x_2</math> là hoành độ giao điểm nên <math>x_1, x_2</math> là nghiệm của phương trình (1)</p> <p>Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: <math display="block">\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{2} \end{cases}</math></p> <p>Vì A (<math>x_1; y_1</math>) và B(<math>x_2; y_2</math>) là tọa độ giao điểm của (d) và (P) nên</p> $y_1 = 2x_1^2; y_2 = 2x_2^2$                                                                                                                                                                   | <p>0,25</p>                                     |

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                     |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
|                     | <p>Ta có:</p> $2y_1 + 2y_2 = (m+1)x_2 + 2x_1^2 + 8$ $\Leftrightarrow 4x_1^2 + 4x_2^2 = 2.(x_1 + x_2)x_2 + 2x_1^2 + 8$ $\Leftrightarrow 4x_1^2 + 4x_2^2 = 2.x_1 x_2 + 2x_2^2 + 2x_1^2 + 8$ $\Leftrightarrow 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2.x_1 x_2 - 8 = 0$ $\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 6x_1 x_2 - 8 = 0$ $\Leftrightarrow 2.\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - 6.\frac{m-3}{2} - 8 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{m^2+2m+1}{2} - \frac{6m-18}{2} - 8 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 6m + 18 - 16 = 0$ $\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$ <p>Vậy <math>m \in \{1; -3\}</math></p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <p><b>Câu 4</b></p> |  <p>a) Chứng minh tứ giác BMNI là tứ giác nội tiếp</p> <p>Ta có:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p>0,25</p>                         |

|                                                                                                                                                  |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)                                                                                    | 0,25 |
| $\widehat{NIB} = 90^\circ$ (Gt)                                                                                                                  | 0,25 |
| Do đó: $\widehat{AMB} + \widehat{NIB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$                                                                         | 0,25 |
| Suy ra tứ giác BMNI là tứ giác nội tiếp.                                                                                                         |      |
| <b>b) Chứng minh ba điểm B, N, D thẳng hàng và tính <math>AD.AC + BM.BC</math> theo R</b>                                                        |      |
| - Chứng minh N là trực tâm của tam giác ABC và BD vuông góc với AC suy ra B, N, D thẳng hàng.                                                    | 0,25 |
| - Chứng minh $\triangle ABD$ đồng dạng với $\triangle ACI$ , suy ra:                                                                             | 0,25 |
| $AD.AC = AI.AB \quad (1)$                                                                                                                        |      |
| - Chứng minh $\triangle BMA$ đồng dạng với $\triangle BIC$ , suy ra:                                                                             | 0,25 |
| $BM.BC = BI.BA \quad (2)$                                                                                                                        |      |
| Từ (1) và (2) suy ra:                                                                                                                            |      |
| $\begin{aligned} AD.AC + BM.BC &= AI.AB + BI.BA \\ &= AB(AI + BI) \\ &= AB.AB = 4R^2 \end{aligned}$                                              | 0,25 |
| <b>c) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC. Chứng minh O' luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ KB</b> |      |
| Lấy điểm E đối xứng với điểm B qua điểm I. Vì điểm I và điểm B cố định nên điểm E cố định.                                                       | 0,25 |
| Tam giác NBE cân tại N (vì có đường cao đồng thời là đường trung tuyến) suy ra:                                                                  |      |
| $\widehat{NEB} = \widehat{NBE}$                                                                                                                  |      |
| Mà $\widehat{ACI} = \widehat{NBE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$ ) nên $\widehat{ACI} = \widehat{NEI}$ .                                         | 0,25 |
| Suy ra tứ giác AENC là tứ giác nội tiếp                                                                                                          |      |
| Do đó đường tròn ngoại tiếp tứ giác AENC cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC.                                                       |      |
| Tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AENC.                                          | 0,25 |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                 |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|              | <p>Suy ra: <math>O'A = O'E</math> hay <math>O'</math> nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng <math>AE</math> cố định.</p> <p>Vậy khi <math>M</math> di chuyển trên cung nhỏ <math>KB</math> thì tâm <math>O'</math> của đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ANC</math> luôn nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng <math>AE</math> cố định</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25                                            |
| <b>Câu 5</b> | <p>Đặt <math>\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c</math> thì <math>a, b, c &gt; 0</math> và <math>a^2 + b^2 + c^2 = 1</math>.</p> $P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có</p> $a^2(1 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$ $\Rightarrow a(1 - a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \quad (1)$ <p>Tương tự: <math>\frac{b^2}{b(1 - b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \quad (2); \quad \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 \quad (3)</math></p> <p>Từ (1); (2); (3) suy ra: <math>P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}</math>.</p> <p>Đẳng thức xảy ra <math>\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}</math> hay <math>x = y = z = \sqrt{3}</math>.</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của <math>P</math> là <math>\frac{3\sqrt{3}}{2}</math>. xảy ra khi <math>x = y = z = \sqrt{3}</math>.</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |

**Chú ý:**

- Nếu học sinh làm cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa
- Bài 2b nếu học sinh không so sánh giá trị tìm được của  $x$  với ĐKXD thì trừ 0,25 điểm