

Câu 1 (2,0 điểm).

- a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.
- b) Chứng minh rằng $P = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$ là số nguyên.

Câu 2 (2,0 điểm).

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 8x + 4(y-4)^2 = 0$.
- b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2 + m = 2023n^2 + n$ thì $2022(m+n)+1$ là số chính phương.

Câu 3 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x + 15} - 3x + 1 = 0$.
- b) Cho hai số thực a, b phân biệt. Quanh đường tròn viết n số thực đôi một khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền kề nó. Tìm n và các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết lần lượt là a và b .

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AA_1 , đường trung tuyến BB_1 và đường phân giác trong CC_1 . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1, BB_1, CC_1 với (O) . Biết $A_1B_1C_1$ là tam giác đều.

- a) Chứng minh rằng tam giác ABC đều.
- b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE , N là trung điểm của đoạn thẳng CD , I là giao điểm của AN và FM . Tính $\widehat{AIF}$.
- c) Tia CI cắt AF và (O) lần lượt tại J và K . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

Tính tỉ số $\frac{JA}{JF}$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2b + ab^2 - 2(a+b+ab) = 0$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – thang điểm

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

b) Chứng minh rằng $P = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$ là số nguyên.

Nội dung	Điểm
a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.	1,0
Tính được $\Delta' = (m-3)^2$.	
Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ thì $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2m-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$	0,25
Theo Vi-et có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 x_2 = 2m-5 \end{cases}$	0,25
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3x_1 x_2 \Leftrightarrow 2(m-2) = 3(2m-5) \Leftrightarrow m = \frac{11}{4}$.	0,25
Kết hợp điều kiện kết luận $m = \frac{11}{4}$ là giá trị cần tìm.	0,25
b) Chứng minh rằng $P = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$ là số nguyên.	1,0
Ta có $P^3 = 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9} + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} + 3\sqrt[3]{\left(2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)\left(2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)}\left[\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}\right]$	0,25
$\Leftrightarrow P^3 = 4 + 3\sqrt[3]{\left(2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)\left(2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)}.P \Leftrightarrow P^3 = 4 + 2P$	0,25
$\Leftrightarrow P^3 - 2P - 4 = 0 \Leftrightarrow (P-2)(P^2 + 2P + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P^2 + 2P + 2 = 0 \end{cases}$	0,25
Vì $P^2 + 2P + 2 = (P+1)^2 + 1 > 0, \forall P$ nên phương trình $P^2 + 2P + 2 = 0$ vô nghiệm. Vậy $P = 2$, hay P là số nguyên (đpcm).	0,25

Câu 2 (2,0 điểm).

- a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 8x + 4(y - 4)^2 = 0$.
- b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2 + m = 2023n^2 + n$ thì $2022(m + n) + 1$ là số chính phương.

Nội dung	Điểm
a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 8x + 4(y - 4)^2 = 0$ (1)	1,0
Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2(y - 4)x + 4(y - 4)^2 = 0$ (2) Coi phương trình (2) là phương trình bậc hai ẩn x , ta cần tìm điều kiện của y để phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$	0,25
$\Leftrightarrow (y - 4)^2 - 4(y - 4)^2 = -3(y - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 4$.	0,25
Với $y = 4$ thì phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 0$.	0,25
Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(x; y) = (0; 4)$.	0,25
b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2 + m = 2023n^2 + n$ thì $2022(m + n) + 1$ là số chính phương.	1,0
$2022m^2 + m = 2023n^2 + n \Leftrightarrow 2022m^2 - 2022n^2 + m - n = n^2$ $\Leftrightarrow (m - n)(2022m + 2022n + 1) = n^2$ (1).	0,25
+ TH1: Với $m = n$ từ (1) suy ra $m = n = 0 \Rightarrow 2022(m + n) + 1 = 1$ là số chính phương. + TH2: Với $m \neq n \Rightarrow m - n > 0$. Gọi $(m - n; 2022m + 2022n + 1) = d$ $\Rightarrow \begin{cases} m - n : d \\ 2022m + 2022n + 1 : d \end{cases} \Rightarrow n^2 : d^2 \Rightarrow n : d \Rightarrow m : d$.	0,25
$\Rightarrow 2022m + 2022n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$.	0,25
$\Rightarrow (m - n; 2022m + 2022n + 1) = 1$ hay $m - n$ và $2022m + 2022n + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Mặt khác $(m - n)(2022m + 2022n + 1) = n^2$ là số chính phương nên suy ra $2022(m + n) + 1$ là số chính phương (đpcm).	0,25

Câu 3 (2,0 điểm).

- a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x + 15} - 3x + 1 = 0$.
- b) Cho hai số thực a, b phân biệt. Quanh đường tròn viết n số thực đôi một khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền kề nó. Tìm n và các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết lần lượt là a và b .

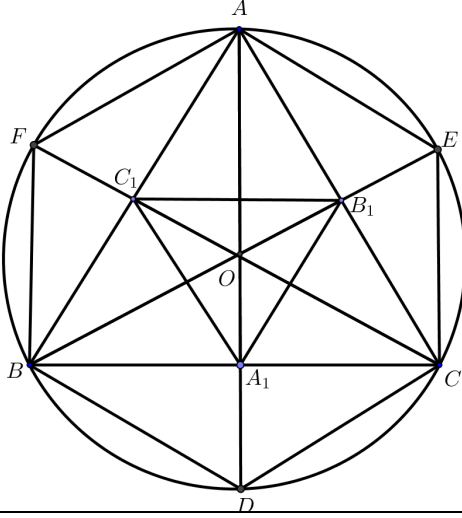
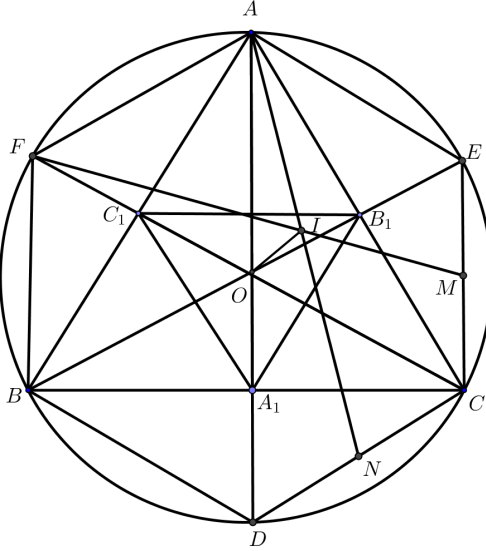
Nội dung	Điểm
a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x + 15} - 3x + 1 = 0$ (1).	1,0
Phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x + 15} = 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 3x + 15 = (3x - 1)^2 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 4x^2 - 3x + 15 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases}$	0,25

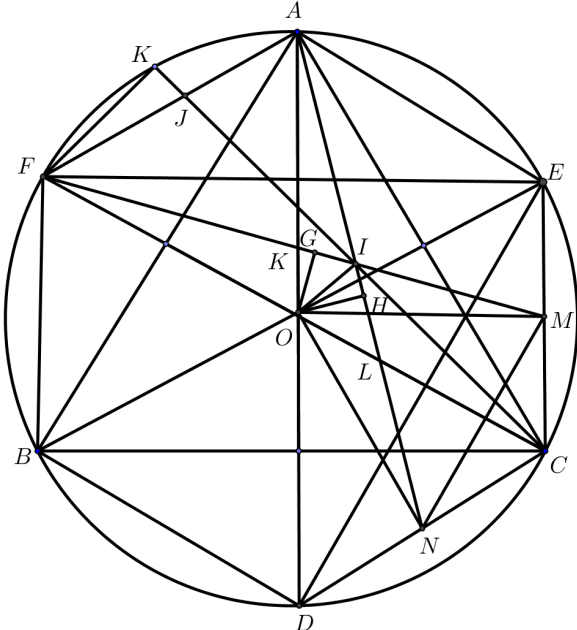
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 5x^2 - 3x - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x = 2 \\ x = -\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$	0,25
Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.	0,25
b) Cho hai số thực a, b phân biệt. Quanh đường tròn viết n số thực đôi một khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền kề nó. Tìm n và các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết lần lượt là a và b.	1,0
Đánh số các số được viết lần lượt là $a_1; a_2; \dots; a_n$ với $a_1 = a; a_2 = b$. Ta có $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a; a_5 = -b; a_6 = a - b; a_7 = a \equiv a_1$. Suy ra $n \leq 6$. Mà $n \geq 3$ nên $n \in \{3; 4; 5; 6\}$.	0,25
TH1: $n = 3$. Ta có $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a$. Vì $a_3 = a_1 + a_2 \Rightarrow b - a = b + a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a_2 = a_3$ (Loại). TH2: $n = 4$. Ta có $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a$. Vì $a_4 = a_1 + a_3 \Rightarrow -a = b \Rightarrow a_2 = a_4$ (Loại).	0,25
TH3: $n = 5$. Ta có $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a; a_5 = -b$. Vì $a_5 = a_1 + a_4 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a_2 = a_5$ (Loại). TH4: $n = 6$. Ta có $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a; a_5 = -b; a_6 = a - b$. Dễ thấy $a_6 = a_1 + a_5$ luôn thỏa mãn.	0,25
Để các số a_i ($i = 1, 6$) phân biệt thì $ab \neq 0; a \neq b; a \neq 2b; b \neq 2a$ (*). Vậy $n = 6$ và các số được viết là $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a; a_5 = -b; a_6 = a - b$. Trong đó a, b thỏa mãn điều kiện (*).	0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AA_1 , đường trung tuyến BB_1 và đường phân giác trong CC_1 . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1, BB_1, CC_1 với (O) . Biết $A_1B_1C_1$ là tam giác đều.

- Chứng minh rằng tam giác ABC đều.
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE , N là trung điểm của đoạn thẳng CD , I là giao điểm của AN và FM . Tính $\widehat{AIF}$.
- Tia CI cắt AF và (O) lần lượt tại J và K . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

Tính tỉ số $\frac{JA}{JF}$.

Nội dung	Điểm
a) Chứng minh rằng tam giác ABC đều.	1,0
	
Xét tam giác AA_1C vuông tại A_1 có B_1 là trung điểm cạnh AC nên $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC$	0,25
Suy ra $B_1C_1 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \Delta AC_1C$ vuông tại C_1 , mà CC_1 là đường phân giác của góc C nên C_1 là trung điểm cạnh AB .	0,25
Lại có $A_1C_1 = B_1C_1 = \frac{1}{2}AC$ nên A_1C_1 là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra A_1 là trung điểm cạnh BC .	0,25
Vậy A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Suy ra ΔABC đều (đpcm).	0,25
b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE, N là trung điểm của đoạn thẳng CD, I là giao điểm của AN và FM. Tính $\widehat{AIF}$.	1,0
	
Vì ΔABC đều nên $AFBDCE$ là lục giác đều. Do đó số đo $\widehat{AF} = \widehat{FB} = \widehat{BD} = \widehat{DC} = \widehat{CE} = \widehat{EA} = 60^\circ$.	0,25
Xét ΔFCM và ΔADN có $FC = AD$, $CM = DN$, $\widehat{FCM} = \widehat{ADN} = 60^\circ$. Suy ra $\Delta FCM = \Delta ADN$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{CFM}$.	0,5
$\Rightarrow \widehat{OAI} = \widehat{OFI} \Rightarrow OIAF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{AOF} = 60^\circ$.	0,25

c) Tia CI cắt AF và (O) lần lượt tại J và K. Chứng minh rằng I là trung điểm của CK. Tính tỉ số $\frac{JA}{JF}$.	1,0
	
Ta có $\triangle OCE$ và $\triangle OCD$ là hai tam giác đều bằng nhau suy ra $OM = ON = \frac{1}{2}DE$. Lại có MN là đường trung bình của tam giác $CED \Rightarrow MN = \frac{1}{2}DE$. Suy ra $\triangle OMN$ đều. $\Rightarrow \widehat{MON} = \widehat{MIN} = 60^\circ \Rightarrow M, I, O, N$ cùng thuộc một đường tròn.	0,25
Lại có $\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = 90^\circ \Rightarrow O, N, C, M$ cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Vậy 5 điểm O, I, M, C, N cùng thuộc một đường tròn đường kính OC. Suy ra $\widehat{OIC} = \widehat{OMC} = 90^\circ \Rightarrow OI \perp CK \Rightarrow I$ là trung điểm của CK.	0,25
Từ O kẻ $OG \perp FM$, $OH \perp AN$. Gọi L là giao của AN và CF. Ta có $\triangle AOH = \triangle FOG$ (trường hợp đặc biệt của tam giác vuông) $\Rightarrow OG = OH \Rightarrow \triangle OGI = \triangle OHI \Rightarrow \widehat{GIO} = \widehat{HIO}$. $\Rightarrow OI$ là phân giác của góc $\widehat{FIL} \Rightarrow \frac{OL}{OF} = \frac{IL}{IF}$. Mà L là trọng tâm $\triangle ADC \Rightarrow \frac{OL}{OF} = \frac{IL}{IF} = \frac{1}{3} \Rightarrow IF = 3IL$ (1). Gọi bán kính của (O) là $R \Rightarrow CE = R$. Xét $\triangle ECF$ vuông tại E có $EF = CE \cdot \tan \widehat{ECF} = R \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}R$. $\Rightarrow FM = \sqrt{EF^2 + EM^2} = \sqrt{3R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{13}}{2}$. Mà tứ giác $OIMC$ nội tiếp nên $FI \cdot FM = FO \cdot FC = 2R^2$. $\Rightarrow IF = \frac{2R^2}{FM} = \frac{4\sqrt{13}R}{13} \Rightarrow IL = \frac{IF}{3} = \frac{4\sqrt{13}R}{39}$.	0,25
Vì tứ giác $OIAF$ nội tiếp nên $LO \cdot LF = IL \cdot AL = \frac{4}{9}R^2 \Rightarrow AL = \frac{\sqrt{13}R}{3} \Rightarrow AI + IL = \frac{\sqrt{13}R}{3} \Rightarrow AI = \frac{3\sqrt{13}R}{13}$. Để có $\widehat{NIC} = \widehat{NOC} = 30^\circ = \frac{1}{2}\widehat{NIM} \Rightarrow IJ$ là đường phân giác trong góc I của $\triangle AIF$.	0,25

Suy ra $\frac{JA}{JF} = \frac{IA}{IF} = \frac{3}{4}$.	
--	--

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$.

Nội dung	Điểm
Ta có $a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0 \Leftrightarrow ab(a + b) = 2(a + b) + 2ab$ $\Leftrightarrow a + b = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + 2 \geq \frac{8}{a + b} + 2 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 2(a + b) - 8 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 4.$	0,25
Lại có $a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{ab} + \frac{2}{a + b} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a + b}$.	0,25
$P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab} = \frac{2ab(a^2 + b^2) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$ $= a^2 + b^2 + \frac{(1 + 2ab)^2 - 3}{2ab} = (a + b)^2 + 2 - \frac{1}{ab}$ $= (a + b)^2 + 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a + b} \right) = (a + b)^2 + \frac{1}{a + b} + \frac{3}{2}$	0,25
$= (a + b)^2 + \frac{64}{a + b} + \frac{64}{a + b} - \frac{127}{a + b} + \frac{3}{2} \geq 3\sqrt{(a + b)^2 \cdot \frac{64}{a + b} \cdot \frac{64}{a + b}} - \frac{127}{4} + \frac{3}{2} = \frac{71}{4}.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{71}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.	0,25

-----Hết-----