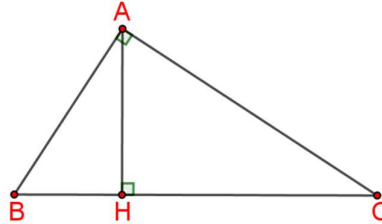


PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (7,5 điểm): Chọn phương án trả lời đúng duy nhất trong các câu sau.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $AC^2 = CH.BH$. B. $AC^2 = CH.CB$. C. $AC^2 = AH.BC$. D. $AC^2 = AB.BC$.

Câu 2. Hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{ cm}$, độ dài đường sinh $l = 3\text{ cm}$ có diện tích xung quanh bằng

- A. $30\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. B. $15\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. C. $20\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. D. $40\pi\text{ (cm}^2\text{)}$.

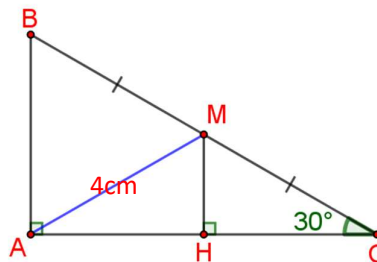
Câu 3. Cho $x \geq 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $x\sqrt{7} = \sqrt{7x^2}$. B. $x\sqrt{7} = -\sqrt{7x^2}$. C. $x\sqrt{7} = \sqrt{49x^2}$. D. $x\sqrt{7} = \sqrt{49x}$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A (Hình vẽ) Độ dài trung tuyến $AM = 4\text{ cm}$, góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Độ dài đoạn thẳng HM bằng



- A. 2 (cm) . B. $2,1\text{ (cm)}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{2}\text{ (cm)}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{ (cm)}$.

Câu 6. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 20 cm . Nếu giữ nguyên chiều rộng và tăng chiều dài lên 2 lần thì chu vi của hình chữ nhật mới bằng 32 cm . Các kích thước của hình chữ nhật ban đầu là

- A. 12 cm, 8 cm. B. 14 cm, 6 cm. C. 7 cm, 3 cm. D. 6 cm, 4 cm.

Câu 7. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

- A. $x - \frac{2}{x^2} + \sqrt{2022} = 0$. B. $x^2 + 3x - 10 = 0$. C. $2x + \sqrt{2023} = 0$. D. $x^2 - 2y - 1 = 0$.

Câu 8. Biểu thức $P = \sqrt{x-5}$ xác định khi và chỉ khi

- A. $x \neq 5$. B. $x \geq 5$. C. $x \leq 5$. D. $x = 5$.

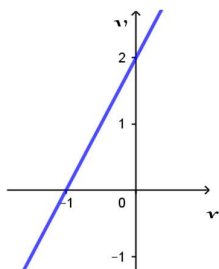
Câu 9. Cho $a < 0, b > 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\sqrt{|ab|} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$. B. $\sqrt{|ab|} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. C. $\sqrt{|ab|} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$. D. $\sqrt{|ab|} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{b}$.

Câu 10. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. Đường kính vuông góc với một dây thì hai đầu mút của dây đó đối xứng với nhau qua đường kính đó.
 B. Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.
 C. Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì luôn vuông góc với dây đó.
 D. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

Câu 11. Cho hàm số $y = ax + 2$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a = 1$. B. $a = -2$. C. $a = -1$. D. $a = 2$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 5x - 3$. B. $y = \sqrt{x+2}$. C. $y = \frac{1}{x} + 3$. D. $y = 3x^2$.

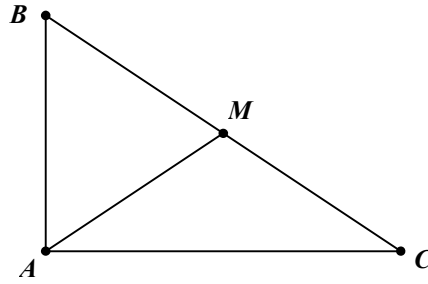
Câu 13. Cho hàm số $y = -x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến khi $x > 0$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Câu 14. Cho đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và dây $AB = 16 \text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB bằng

- A. 6 (cm). B. 4 (cm). C. 5 (cm). D. 3 (cm).

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 5 \text{ cm}$, $\sin B = \frac{5}{6}$.



Độ dài trung tuyến AM bằng

- A. 6 (cm). B. 4 (cm). C. 3 (cm). D. 5 (cm).

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2 - 6x + 6 - 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 17. Hai hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ mx - 3y = -1 \end{cases}$ tương đương với nhau khi và chỉ khi

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Câu 18. $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$ bằng

- A. 2. B. $1 - \sqrt{2}$. C. $1 - \sqrt{3}$. D. $\sqrt{3} - 1$.

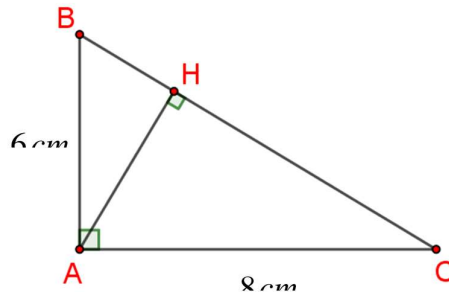
Câu 19. Căn bậc hai số học của 16 là

- A. 16. B. 4 và -4. C. 4. D. -4.

Câu 20. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số $y = 1 - 2x$?

- A. $(0; 0)$. B. $(-2; -3)$. C. $(-2; 5)$. D. $(2; 5)$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. (tham khảo hình vẽ)



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\cos \widehat{ABH} = \frac{4}{5}$. B. $\cos \widehat{ABH} = \frac{4}{3}$. C. $\cos \widehat{ABH} = \frac{3}{4}$. D. $\cos \widehat{ABH} = \frac{3}{5}$.

Câu 22. Cho hai đường tròn $(O_1; 8\text{ cm})$ và $(O_2; 3\text{ cm})$, với $O_1O_2 = 5\text{ cm}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. (O_1) đựng (O_2) .
 B. Hai đường tròn cắt nhau.
 C. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài.
 D. Hai đường tròn tiếp xúc trong.

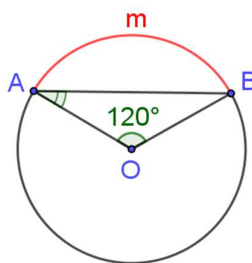
Câu 23. Thể tích khối cầu bán kính $r = 3\text{ cm}$ là

- A. $9\pi (\text{cm}^3)$.
 B. $40\pi (\text{cm}^3)$.
 C. $36\pi (\text{cm}^3)$.
 D. $54\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 24. Cho hình nón bán có bán kính đáy, độ dài đường sinh, chiều cao lần lượt là r, l, h . Diện tích xung quanh của hình nón là

- A. $S = \pi rl$.
 B. $S = 2\pi rh$.
 C. $S = \pi r^2$.
 D. $S = \pi rh$.

Câu 25. Trên đường tròn (O) cho cung $\widehat{AmB}$ có số đo bằng 120° (tham khảo hình vẽ).



Số đo góc $\widehat{OAB}$ bằng

- A. 30° .
 B. 35° .
 C. 40° .
 D. 60° .

Câu 26. Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y^2 = 1 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

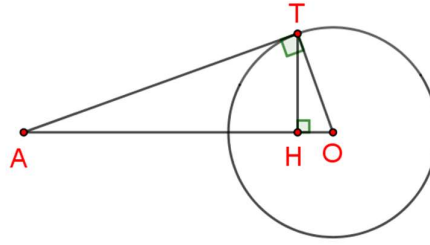
Câu 27. Đồ thị của hàm số $y = -x^2$ đi qua điểm

- A. $N(-2; 4)$.
 B. $M(-2; -4)$.
 C. $P(-1; 1)$.
 D. $Q(-4; 2)$.

Câu 28. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.
 B. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2$.
 C. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} - 2$.
 D. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = 5 - \sqrt{2}$.

Câu 29. Cho đường tròn $(O; R)$, AT là tiếp tuyến của (O) với $AO = 3R$ (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\sin \widehat{OTH} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\sin \widehat{OTH} = \frac{1}{4}$. C. $\sin \widehat{OTH} = \frac{1}{3}$. D. $\sin \widehat{OTH} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 30. Hàm số $y = (k - 2)x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $k < 2$. B. $k \leq 3$. C. $k > 1$. D. $k > 2$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (2,5 điểm): Trình bày chi tiết lời giải trong các bài toán sau.

Câu 31. (1,0 điểm). Giải phương trình: $x(x - 3) = 2x - 4$.

Câu 32. (1,0 điểm). Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ ($C \neq A$; $C \neq B$). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA . Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

b) $AC \cdot AE = \frac{AB^2}{4}$.

Câu 33. (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) \left(b + \frac{1}{c} - 1\right) \left(c + \frac{1}{a} - 1\right) \leq 1.$$

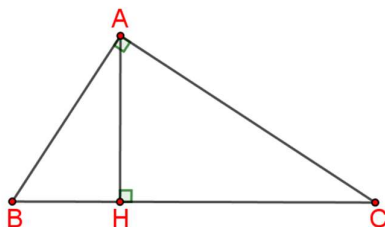
----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (7,5 điểm): Chọn phương án trả lời đúng duy nhất trong các câu sau.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	B	A	A	B	A	D	B	B	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	A	D	A	C	A	C	D	C	C
Câu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Đáp án	D	D	C	A	A	B	B	B	C	A

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $AC^2 = CH.BH$. **B.** $AC^2 = CH.CB$. **C.** $AC^2 = AH.BC$. **D.** $AC^2 = AB.BC$.

Câu 2. Hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{ cm}$, độ dài đường sinh $l = 3\text{ cm}$ có diện tích xung quanh bằng

- A.** $30\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. **B.** $15\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. **C.** $20\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. **D.** $40\pi\text{ (cm}^2\text{)}$.

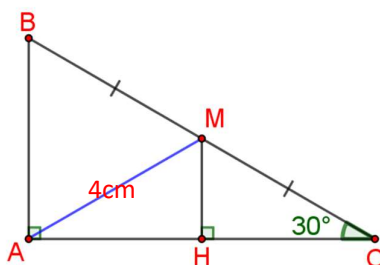
Câu 3. Cho $x \geq 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $x\sqrt{7} = \sqrt{7x^2}$. **B.** $x\sqrt{7} = -\sqrt{7x^2}$. **C.** $x\sqrt{7} = \sqrt{49x^2}$. **D.** $x\sqrt{7} = \sqrt{49x}$.

Câu 4. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là

- A.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A (Hình vẽ) Độ dài trung tuyến $AM = 4\text{ cm}$, góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Độ dài đoạn thẳng HM bằng



- A. 2(cm). **B.** 2,1(cm). **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{2}$ (cm). **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (cm).

Câu 6. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 20cm. Nếu giữ nguyên chiều rộng và tăng chiều dài lên 2 lần thì chu vi của hình chữ nhật mới bằng 32 cm. Các kích thước của hình chữ nhật ban đầu là

- A.** 12 cm, 8cm. **B.** 14 cm, 6 cm. **C.** 7 cm, 3 cm. **D.** 6 cm, 4 cm.

Câu 7. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

- A.** $x - \frac{2}{x^2} + \sqrt{2022} = 0$. **B.** $x^2 + 3x - 10 = 0$. **C.** $2x + \sqrt{2023} = 0$. **D.** $x^2 - 2y - 1 = 0$.

Câu 8. Biểu thức $P = \sqrt{x - 5}$ xác định khi và chỉ khi

- A.** $x \neq 5$. **B.** $x \geq 5$. **C.** $x \leq 5$. **D.** $x = 5$.

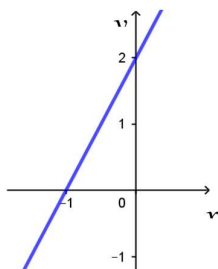
Câu 9. Cho $a < 0, b > 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\sqrt{|ab|} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$. **B.** $\sqrt{|ab|} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. **C.** $\sqrt{|ab|} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$. **D.** $\sqrt{|ab|} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{b}$.

Câu 10. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A.** Đường kính vuông góc với một dây thì hai đầu mút của dây đó đối xứng với nhau qua đường kính đó.
B. Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây đó.
C. Đường kính đi qua trung điểm của một dây thì luôn vuông góc với dây đó.
D. Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.

Câu 11. Cho hàm số $y = ax + 2$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $a = 1$. **B.** $a = -2$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = 2$.

Câu 12. Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 5x - 3$. **B.** $y = \sqrt{x+2}$. **C.** $y = \frac{1}{x} + 3$. **D.** $y = 3x^2$.

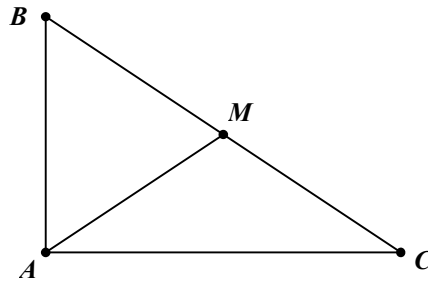
Câu 13. Cho hàm số $y = -x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đồng biến khi $x > 0$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số nghịch biến khi $x > 0$.

Câu 14. Cho đường tròn $(O; 10 \text{ cm})$ và dây $AB = 16 \text{ cm}$. Khoảng cách từ tâm O đến dây AB bằng

- A.** 6 (cm). **B.** 4 (cm). **C.** 5 (cm). **D.** 3 (cm).

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 5 \text{ cm}$, $\sin B = \frac{5}{6}$.



Độ dài trung tuyến AM bằng

- A.** 6 (cm). **B.** 4 (cm). **C.** 3 (cm). **D.** 5 (cm).

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $x^2 - 6x + 6 - 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 17. Hai hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ mx - 3y = -1 \end{cases}$ tương đương với nhau khi và chỉ khi

- A.** $m = -1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Câu 18. $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ bằng

- A.** 2. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $1-\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}-1$.

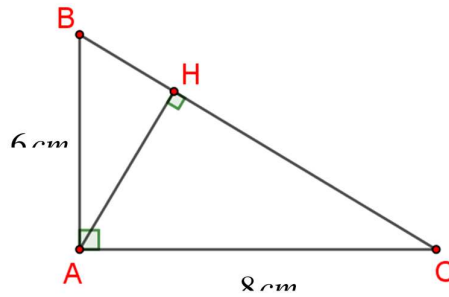
Câu 19. Căn bậc hai số học của 16 là

- A.** 16. **B.** 4 và -4 . **C.** 4. **D.** -4 .

Câu 20. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số $y = 1 - 2x$?

- A.** $(0; 0)$. **B.** $(-2; -3)$. **C.** $(-2; 5)$. **D.** $(2; 5)$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. (tham khảo hình vẽ)



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\cos \widehat{ABH} = \frac{4}{5}$. B. $\cos \widehat{ABH} = \frac{4}{3}$. C. $\cos \widehat{ABH} = \frac{3}{4}$. D. $\cos \widehat{ABH} = \frac{3}{5}$.

Câu 22. Cho hai đường tròn $(O_1; 8\text{ cm})$ và $(O_2; 3\text{ cm})$, với $O_1O_2 = 5\text{ cm}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. (O_1) đựng (O_2) . B. Hai đường tròn cắt nhau.
C. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài. D. Hai đường tròn tiếp xúc trong.

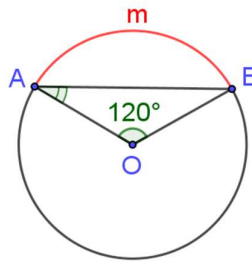
Câu 23. Thể tích khối cầu bán kính $r = 3\text{ cm}$ là

- A. $9\pi (\text{cm}^3)$. B. $40\pi (\text{cm}^3)$. C. $36\pi (\text{cm}^3)$. D. $54\pi (\text{cm}^3)$.

Câu 24. Cho hình nón bán có bán kính đáy, độ dài đường sinh, chiều cao lần lượt là r, l, h . Diện tích xung quanh của hình nón là

- A. $S = \pi rl$. B. $S = 2\pi rh$. C. $S = \pi r^2$. D. $S = \pi rh$.

Câu 25. Trên đường tròn (O) cho cung $\widehat{AmB}$ có số đo bằng 120° (tham khảo hình vẽ).



Số đo góc $\widehat{OAB}$ bằng

- A. 30° . B. 35° . C. 40° . D. 60° .

Câu 26. Hệ phương trình nào dưới đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y^2 = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

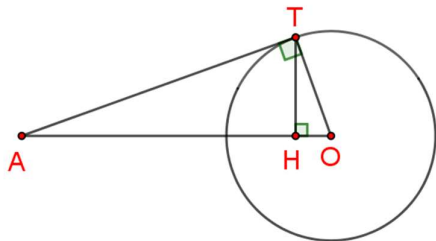
Câu 27. Đồ thị của hàm số $y = -x^2$ đi qua điểm

- A. $N(-2;4)$. B. $M(-2;-4)$. C. $P(-1;1)$. D. $Q(-4;2)$.

Câu 28. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} + 2$.
C. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} - 2$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = 5 - \sqrt{2}$.

Câu 29. Cho đường tròn $(O; R)$, AT là tiếp tuyến của (O) với $AO = 3R$ (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\sin \widehat{OTH} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\sin \widehat{OTH} = \frac{1}{4}$. C. $\sin \widehat{OTH} = \frac{1}{3}$. D. $\sin \widehat{OTH} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 30. Hàm số $y = (k-2)x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A. $k < 2$. B. $k \leq 3$. C. $k > 1$. D. $k > 2$.

PHẦN II. TỰ LUẬN (2,5 điểm): Trình bày chi tiết lời giải trong các bài toán sau.

Câu 31. (1,0 điểm). Giải phương trình: $x(x-3) = 2x-4$.

Lời giải

+ Ta có:

$$x(x-3) = 2x-4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}.$$

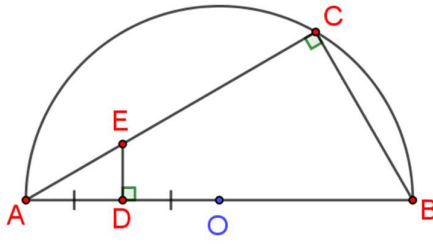
+ **Kết luận:** Tập nghiệm phương trình là $S = \{1; 4\}$.

Câu 32. (1,0 điểm). Trên nửa đường tròn (O) đường kính AB lấy điểm C sao cho $AC > BC$ ($C \neq A$; $C \neq B$). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng OA . Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt AC tại E . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCED$ nội tiếp được.

b) $AC \cdot AE = \frac{AB^2}{4}$.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $BCED$ nội tiếp.

+) Góc $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ECB} = 90^\circ$

+) Vì $ED \perp AB$ tại $D \Rightarrow \widehat{EDB} = 90^\circ$.

+) Tứ giác $BCED$ có tổng hai góc đối $\widehat{ECB} + \widehat{EDB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nội tiếp đường tròn đường kính EB .

b) Chứng minh $AC.AE = \frac{AB^2}{4}$.

Xét hai tam giác ADE và ACB có góc $\hat{A}$ chung và $\widehat{ADE} = \widehat{ACB} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACB$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Leftrightarrow AC.AE = AD.AB. \quad (1) \quad \text{Mà } AD = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AB \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được } AC.AE = \frac{1}{4}AB.AB = \frac{AB^2}{4}.$$

Câu 33. (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) \leq 1.$$

Lời giải

+) Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$ với $x > 0; y > 0; z > 0$. Thay vào bất đẳng thức (1) ta được bất đẳng thức tương đương là

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{x}{z} - 1\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} - 1\right) \leq 1 \Leftrightarrow (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz. \quad (2)$$

+) Xét tổng ba thừa số vế trái:

$$x + y - z + y + z - x + x + z - y = x + y + z > 0, \text{ nên có các khả năng sau:}$$

TH1: Nếu có 1 thừa số âm và hai thừa số dương lúc này bất đẳng thức (2) luôn đúng nên bất đẳng thức (1) đúng.

TH2: Nếu có 2 thừa số âm và 1 thừa số dương (Điều này vô lý) vì tổng của 2 thừa số bất kỳ, chẳng hạn: $(x + y - z) + (y + z - x) = 2y > 0$.

TH3: Nếu cả 3 thừa số dương, lúc đó sử dụng bất đẳng thức cho hai số dương ta được:

$$(x+y-z)(y+z-x) \leq \left(\frac{x+y-z+y+z-x}{2} \right)^2 = y^2.$$

$$(y+z-x)(z+x-y) \leq \left(\frac{y+z-x+z+x-y}{2} \right)^2 = z^2.$$

$$(z+x-y)(x+y-z) \leq \left(\frac{z+x-y+x+y-z}{2} \right)^2 = x^2.$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left[(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \right]^2 \leq x^2 y^2 z^2.$$

$$\Leftrightarrow (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz.$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh suy ra bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ suy ra $a = b = c = 1$.

----- **Hết** -----