

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = (x-1)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $2x^2 + x = 4(\sqrt{x-1})^3 + 6\sqrt{x-1}$.

2. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 11x + 4 = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai nhận hai số $x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$ và $x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ làm hai nghiệm.

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^2 - 2q^2 = 1$.

2. Ba cầu thủ của một đội bóng trò chuyện với nhau về số áo được in trên áo mỗi người, nội dung như sau:

An: Tôi nhận ra rằng các số trên áo của chúng ta đều là số nguyên tố có hai chữ số.

Bình: Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này.

Chung: Thật thú vị! Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.

An: Và tổng hai số trên áo hai bạn là ngày hôm nay.

Hãy xác định số áo của An, Bình và Chung.

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Cho biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0$). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$. Chứng minh rằng nếu $\Delta \leq 0$ thì $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x .

2. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta có:

$$3(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - z + 1) \geq 1 + xyz + x^2y^2z^2.$$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông ở B có BD là đường cao ($D \in AC$). M là điểm thuộc đường trung trực Δ của đoạn thẳng CD . Đường tròn đường kính MA cắt đường tròn tâm A bán kính AB tại E và F .

a) Chứng minh $AE^2 = AD \cdot AC$.

b) Chứng minh $MC = ME$.

c) Khi M di động trên Δ , chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

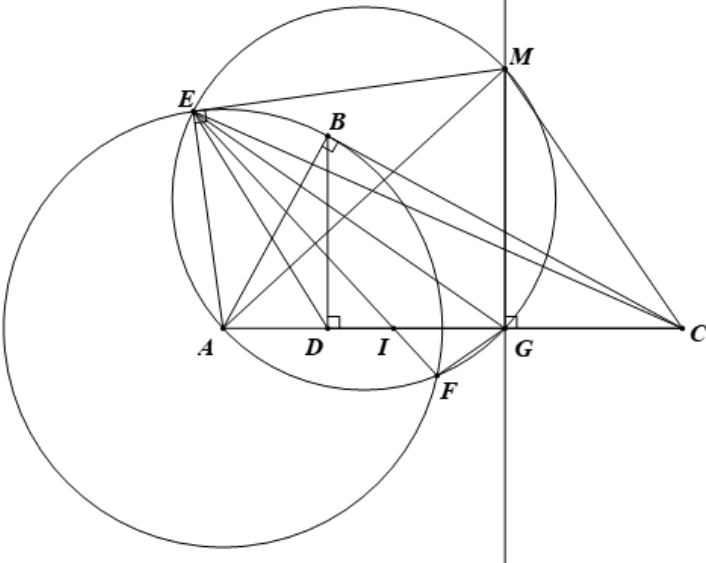
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Khóa ngày 06 tháng 6 năm 2022

(Hướng dẫn chấm có 02 trang)

Câu	Ý	Nội dung yêu cầu	Điểm
1 (2,0 điểm)	a	$\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(\sqrt{x}-1)-1}{x-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)+1}{(\sqrt{x}+1)^2}$	
		$= \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}$	0,5
		Suy ra $P = -(\sqrt{x}-1)^2 - x + 1 = -2x + 2\sqrt{x}$	0,5
	b	Ta có $P = -2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$	0,5
		Suy ra $P \leq \frac{1}{2}$; P đạt GTLN bằng $\frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{4}$	0,5
2 (2,0 điểm)	1	Điều kiện: $x \geq 1$	0,25
		$2x^2 + x = 4(\sqrt{x}-1)^3 + 6\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 2\sqrt{x}-1(2x+1) \Leftrightarrow (2x+1)(x-2\sqrt{x}-1) = 0$	0,25
		Ta được $x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$ (do $x \geq 1$)	0,25
		Từ đó tìm được $x = 2$	0,25
	2	Từ giả thiết ta có: $x_1 + x_2 = 11$; $x_1 \cdot x_2 = 4$	0,25
		Giả sử lập được phương trình bậc hai có hai nghiệm $X_1 = x_1\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_1}$ và $X_2 = x_2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$. Dễ thấy $X_1 > 0, X_2 > 0$.	
		Ta có: $X_1 = \sqrt{x_1}(\sqrt{x_1x_2} + 2) = 4\sqrt{x_1}$, $X_2 = \sqrt{x_2}(\sqrt{x_2x_1} + 2) = 4\sqrt{x_2}$	
		Suy ra $X_1X_2 = 16\sqrt{x_1x_2} = 32$ (1)	0,25
3 (2,0 điểm)	1	$X_1^2 + X_2^2 = 16(x_1 + x_2) \Leftrightarrow (X_1 + X_2)^2 - 2X_1X_2 = 176 \Leftrightarrow (X_1 + X_2)^2 = 240$	
		Suy ra $\begin{cases} X_1 + X_2 = 4\sqrt{15} \\ X_1 + X_2 = -4\sqrt{15} \end{cases}$ (2)	0,25
		Từ (1), (2), kết hợp với $X_1 > 0, X_2 > 0$ suy ra phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x^2 - 4\sqrt{15}x + 32 = 0$	0,25
	2	Từ giả thiết, ta có $p^2 = 2q^2 + 1$, suy ra p lẻ	0,25
		Khi đó $2q^2 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) : 4$ nên $q : 2$. Mà q nguyên tố, nên $q = 2$	0,5
		Suy ra $p = 3$. Vậy $p = 3, q = 2$	0,25
		Gọi A, B, C lần lượt là số áo của An, Bình và Chung	
3 (2,0 điểm)	2	Ta có A, B, C đều là số nguyên tố có 2 chữ số, không lớn hơn 31 và tổng 2 số bất kì trong 3 số này không vượt quá 31. Suy ra $A, B, C \in \{11; 13; 17\}$	0,25
		Từ giả thiết ta cũng suy ra được: $A + C < B + C < A + B \Rightarrow C < A < B$	0,5
		Vậy số áo của An là 13, số áo của Bình là 17, số áo của Chung là 11	0,25

Câu	Ý	Nội dung yêu cầu	Điểm
4 (1,0 điểm)	1	Ta có $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$	0,25
		Do vậy nếu $a > 0$ và $\Delta \leq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$	0,25
	2	Đặt $p = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1); q = xy$. Dễ thấy $p > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ BĐT trở thành $(3p - q^2)z^2 - (3p + q)z + 3p - 1 \geq 0$ Xét $g(z) = (3p - q^2)z^2 - (3p + q)z + 3p - 1$	0,25
		Ta có: $\Delta = (3p + q)^2 - 4(3p - q^2)(3p - 1) = -3(p - q)^2 - 12p(2p - q^2 - 1)$	
		Vì $2p - q^2 - 1 = [xy - (x + y) + 1]^2 + (x - y)^2 = (1 - x)^2(1 - y)^2 + (x - y)^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ Suy ra: $3p - q^2 = p + 2p - q^2 > 0$ và $\Delta \leq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$	0,25
		Vậy $g(z) \geq 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (theo câu 4.1). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$	
5 (3,0 điểm)			
	a	$AD.AC = AB^2$	0,5
		$= AE^2$	0,5
	b	$AM^2 = AE^2 + ME^2 = AD.AC + ME^2$ (1)	0,25
		$AM^2 = AG^2 + MG^2 = (AD + DG)^2 + MG^2$ $= MD^2 + AD(AD + 2DG) = MD^2 + AD.AC$ (2)	0,5
		(1), (2) $\Rightarrow MD = ME \Rightarrow MC = ME$	0,25
	c	Do $MF = ME$ nên từ b) suy ra $ME = MC = MD = MF$, hay $CEDF$ nội tiếp Suy ra $IE.IF = IC.ID$ (với I là giao điểm của CD và EF)	0,25
		Mặt khác G, E, A, F cùng thuộc một đường tròn nên $IE.IF = IG.IA$ (với G là trung điểm CD)	0,25
		Từ đó suy ra $IC.ID = IG.IA$	0,25
		Từ đây tính được $ID = \frac{DG.DA}{GA}$, suy ra I cố định. (có thể chứng minh I cố định bằng cách chỉ ra $\triangle AEI \sim \triangle AGE$)	0,25

----- HẾT -----