

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG
BẮC GIANG

NĂM HỌC 2022 - 2023

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 06/6/2022

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I (5,0 điểm).

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{9-x} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x-4\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq 4$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2+2m-1)x - m^2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3 = 0$.

Câu II (4,0 điểm).

1) Cho đa thức $P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 8x + 1$ và số $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Tính $P(a)$.

2) Giải phương trình $x^2 + 3x - 1 + 2\sqrt[3]{(x^3 + x + 5)^2} = 5\sqrt[3]{x^3 + x + 5}$.

Câu III (4,0 điểm).

1) Tìm ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^4 + 9y^2 + 25z^2 = x^2 + 6xy + 2022$.

2) Cho chín số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác 3; 5 và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương.

Câu IV (6,0 điểm). Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho, H là hình chiếu của M trên AB . Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K .

1) Chứng minh bốn điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB . Chứng minh ba đường thẳng CD, MH, AK đồng quy.

3) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH . Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu V (1,0 điểm). Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3.$$

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi số 1 (Họ tên và chữ ký):.....

Cán bộ coi thi số 2 (Họ tên và chữ ký):.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM

HDC CHÍNH THỨC

Lưu ý khi chấm bài:

- Dưới đây chỉ là sơ lược các bước giải. Lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ hợp logic. Nếu học sinh làm cách khác mà giải đúng thì cho điểm tối đa.
- Đối với câu IV, học sinh không vẽ hình thì không chấm.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu I		(5,0 đ)
Phần 1,a (2,0 điểm)	$A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}+3} + \frac{36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}$	0,5
	$= \frac{x+12\sqrt{x}+27}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1}$ Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 9$.	0,5
Phần 1,b (1,0 điểm)	+ Với $\sqrt{x} < 1$ ta có $A = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-1} < 0$: không thỏa mãn	0,5
	+ Với $\sqrt{x} > 1$ ta có: $A \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x}+9 \geq 4(\sqrt{x}-1)$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{13}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{169}{9}$ Kết hợp với điều kiện của x ta được kết quả cần tìm là $1 < x \leq \frac{169}{9}, x \neq 9$.	0,5
Phần 2 (2,0 điểm)	Phương trình đã cho tương đương với: $(x-m)[x^2-(m+1)x+m-1]=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x^2-(m+1)x+m-1=0 (*) \end{cases}$ Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác m $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2-2m+5 > 0 \\ m^2-(m+1)m+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2+4 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$ Các điều kiện trên luôn đúng với mọi m , suy ra phương trình đã cho luôn có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_3 = m$ với mọi m	0,5
	Từ giả thiết ta có: $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+m^2-3mx_1x_2=0 (**)$	0,5

	Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = m-1 \end{cases}$. Thay vào (**) được: $(m+1)^2 - 2(m-1) + m^2 - 3m(m-1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow -m^2 + 3m + 3 = 0$. Tìm được $m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.	0,5
Câu II		(4,0 đ)
Phần 1 (2,0 điểm)	$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt{2}-1 \Rightarrow (a+1)^2 = 2 \Rightarrow a^2 + 2a - 1 = 0$	0,5
	Chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 2x - 1 = 0$ ta được: $P(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - x + 2) + 3x + 3$	0,5
	Suy ra $P(a) = (a^2 + 2a - 1)(a^3 - a + 2) + 3a + 3 = 3a + 3$	0,5
	Từ đó tính được $P(a) = 3\sqrt{2}$.	0,5
Phần 2 (2,0 điểm)	Đưa phương trình về dạng: $(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 5(x+1) = (x^3 + x + 5) - 2(\sqrt[3]{x^3 + x + 5})^2 + 5\sqrt[3]{x^3 + x + 5}$	0,5
	Đặt $a = x+1, b = \sqrt[3]{x^3 + x + 5}$ ta được phương trình: $a^3 - 2a^2 + 5a = b^3 - 2b^2 + 5b$ $\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b + 5 = 0 \end{cases}$	0,5
	+ Với $a = b$ ta có $x+1 = \sqrt[3]{x^3 + x + 5} \Leftrightarrow (x+1)^3 = x^3 + x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$	0,5
	+ Với $a^2 + ab + b^2 - 2a - 2b + 5 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2 + 2 = 0$: vô nghiệm Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$.	0,5
Câu III		(4,0đ)
Phần 1 (2,0 điểm)	Biến đổi giả thiết về dạng $(x^2 - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (5z)^2 = 2023$	0,5
	Với x, y, z là các số nguyên ta có $(x^2 - 1)^2, (x - 3y)^2, (5z)^2$ là các số chính phương (bình phương của số nguyên) Mỗi số nguyên khi chia cho 8 được số dư là một trong các số $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; 4$ $\Rightarrow$ mỗi số chính phương khi chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0; 1; 4$	0,5
	Từ đó, $(x^2 - 1)^2 + (x - 3y)^2 + (5z)^2$ là tổng của 3 số chính phương nên nó chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$	0,5
	Mặt khác, 2023 chia cho 8 có số dư là 7 Do vậy, không thể tìm được ba số nguyên x, y, z thỏa mãn yêu cầu của đề bài,	0,5
Phần 2 (2,0 điểm)	Giả sử $a_1 = 3^{m_1} \cdot 5^{n_1} \cdot 7^{p_1}, a_2 = 3^{m_2} \cdot 5^{n_2} \cdot 7^{p_2}, \dots, a_9 = 3^{m_9} \cdot 5^{n_9} \cdot 7^{p_9}$ trong đó $m_i, n_i, p_i (i = 1; 2; \dots; 9)$ là các số tự nhiên.	0,5

	Với mỗi $i = 1; 2; \dots; 9$, bộ ba số $(m_i; n_i; p_i)$ có tính chẵn (c), lẻ (l) theo thứ tự là một trong 8 trường hợp dưới đây: $(c; c; c), (c; c; l), (c; l; c), (c; l; l), (l; c; c), (l; c; l), (l; l; c), (l; l; l)$	0,5
	Theo nguyên lý Dirichlet, trong 9 bộ ba số $(m_i; n_i; p_i)$ tồn tại ít nhất hai bộ ba số là $(m_j; n_j; p_j)$ và $(m_k; n_k; p_k)$, với $j, k \in \{1; 2; \dots; 9\}$ và $j \neq k$, cùng ở một trong 8 trường hợp trên $\Rightarrow m_j + m_k, n_j + n_k, p_j + p_k$ là các số chẵn $\Rightarrow m_j + m_k = 2m; n_j + n_k = 2n; p_j + p_k = 2p \ (m, n, p \in \mathbb{N})$	0,5
	Từ đó $a_j \cdot a_k = 3^{m_j+m_k} \cdot 5^{n_j+n_k} \cdot 7^{p_j+p_k} = 3^{2m} \cdot 5^{2n} \cdot 7^{2p} = (3^m \cdot 5^n \cdot 7^p)^2$ $\Rightarrow a_j \cdot a_k$ là số chính phương $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.	0,5
Câu IV		(6,0 đ)
Phần 1 (2,0 điểm)	Ta có $\widehat{KOB} = \widehat{MAB}$ (hai góc đồng vị) mà $\widehat{MAB} = \frac{1}{2} \widehat{MOB}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{KOB} = \frac{1}{2} \widehat{MOB}$	0,5
	$\Rightarrow \widehat{KOB} = \widehat{KOM} \Rightarrow \Delta KOB = \Delta KOM$ (c.g.c)	0,5
	$\Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^\circ$	0,5
	$\Rightarrow \widehat{KMO} + \widehat{KBO} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ tứ giác $OBKM$ nội tiếp Vậy 4 điểm O, B, K, M cùng thuộc một đường tròn.	0,5
Phần 2 (2,0 điểm)	Gọi P là giao điểm của OK và MB . Từ $\widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^\circ \Rightarrow KM, KB$ là các tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow P$ là trung điểm của MB Gọi I, Q lần lượt là giao điểm của AK với MH và nửa đường tròn (O) Ta có $\widehat{BPK} = \widehat{BQK} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BPQK$ nội tiếp	0,5

	$\Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{IQP}$, mà $\widehat{MBK} = \widehat{IMP}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{IQP} = \widehat{IMP} \Rightarrow$ tứ giác $MIPQ$ nội tiếp	0,5
	Từ đó $\widehat{MPI} = \widehat{MQI}$, mà $\widehat{MQI} = \widehat{MBA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) $\Rightarrow \widehat{MPI} = \widehat{MBA} \Rightarrow IP$ song song với AB	0,5
	Mặt khác, P là trung điểm của $MB \Rightarrow I$ là trung điểm của MH , mà $MCHD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của CD Vậy CD, MH, AK đồng quy tại I .	0,5
Phần 3 (2,0 điểm)	Chỉ ra $S_{CDFE} = 2S_{IEF} = IH \cdot EF$	0,5
	$= \frac{1}{2}MH \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}MH \cdot R$	0,5
	Từ đó, S_{CDFE} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ đạt giá trị lớn nhất	0,5
	$\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa của cung $\widehat{AB}$.	0,5
Câu V		(1,0 đ)
(1,0 điểm)	$3abc(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)abc(a^2 + b^2 + c^2)$ $= (ca \cdot ab + ab \cdot bc + bc \cdot ca)(a^2 + b^2 + c^2)$ $\leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$ (Dựa vào BĐT phụ: $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$)	0,5
	$\frac{(ab + bc + ca)^2}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(ab + bc + ca)(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$ $\leq \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)}{3} \right]^3 = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^3 = 9$ (Dựa vào BĐT Cô-si: $x, y, z \geq 0 \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$) Từ đó suy ra $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.	0,5
Tổng		20 đ