

Bài 1. (3,0 điểm)

- 1) Rút gọn các biểu thức:

$$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{16}};$$

$$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{6\sqrt{3}+10}}{(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}}.$$

- 2) Giải phương trình $(1+3x\sqrt{9x^2+1})(\sqrt{9x^2+1}-3x)=1$.

- 3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + xy + 1 = 4x \\ x^3 + x^2y + y = 3x \end{cases}.$$

Bài 2. (3,0 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = ax^2$ qua $M(\sqrt{3}; 3)$ và đường thẳng

$(d): y = -\frac{1}{2}x + m$ (với m là tham số). Xác định phương trình của parabol (P) , từ đó

tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khác gốc tọa độ, sao cho $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16}$.

- 2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$, với m, n là các tham số thỏa mãn $|m| \geq 2, |n| \geq 2$.

Chứng minh rằng: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2$.

- 3) Cho hai số x, y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 10(x - y) + 21 = 0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - y + 2$.

Bài 3. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) cắt nhau tại H . Tia AO cắt BC tại M và cắt (O) tại N ; gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC . Chứng minh:

- 1) DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.

- 2) $\frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$.

- 3) $HE.MQ.HB = HF.MP.NC$.

HẾT

Thí sinh được sử dụng các loại máy tính cầm tay do Bộ Giáo dục và Đào tạo cho phép.

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đáp án có 05 trang)

I. Hướng dẫn chấm thi:

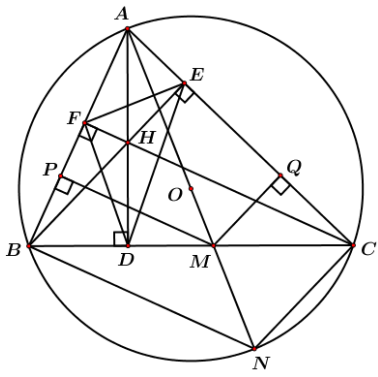
- Cán bộ chấm thi chấm 2 vòng độc lập.
- Cán bộ chấm thi không tự ý thay đổi thang điểm trong đáp án.
- Mọi cách giải khác, nếu đúng vẫn ghi đủ điểm.

II. Đáp án và thang điểm:

Bài	Nội dung	Điểm
1 (3,0đ)	1) Rút gọn các biểu thức:	1,0
	$M = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{16}};$	
	$M = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{15} - \sqrt{14} + \sqrt{16} - \sqrt{15}$	0,25
	$M = \sqrt{16} - 1 = 3$	0,25
	$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}}{(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3+\sqrt{5}}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{(\sqrt{5}-1)\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$	0,25
	$N = \frac{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4}{4} = 1$	0,25
	2) Giải phương trình $(1+3x\sqrt{9x^2+1})(\sqrt{9x^2+1}-3x)=1$	1,0
	$\frac{1+3x\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = 1 \Leftrightarrow 1+3x\sqrt{9x^2+1} = \sqrt{9x^2+1}+3x$	0,25
	$\Leftrightarrow (3x-1)(\sqrt{9x^2+1}-1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 3x-1=0$ hoặc $\sqrt{9x^2+1}-1=0$	0,25
	$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 0$. Vậy $S = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$	0,25
	Cách khác: $(1+3x\sqrt{9x^2+1})(\sqrt{9x^2+1}-3x) = (\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)$	0,25

	$\Leftrightarrow 1+3x\sqrt{9x^2+1}=\sqrt{9x^2+1}+3x$ $\Leftrightarrow \sqrt{9x^2+1}-3x=0 \text{ (vô nghiệm) hoặc } (3x-1)(\sqrt{9x^2+1}-1)=0$	0,25	
	$\Leftrightarrow 3x-1=0 \text{ hoặc } \sqrt{9x^2+1}-1=0$	0,25	
	$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \text{ hoặc } x=0$ Vậy $S=\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$	0,25	
	3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+xy+1=4x \\ x^3+x^2y+y=3x \end{cases}$	1,0	
	Ta có $(0; y)$ không là nghiệm của hệ nên hệ phương trình đã cho được viết lại: $\begin{cases} 2x+y+\frac{1}{x}=4 \\ x^2+xy+\frac{y}{x}=3 \end{cases}$	0,25	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+\left(x+\frac{1}{x}\right)=4 \\ (x+y)\left(x+\frac{1}{x}\right)=4 \end{cases}$	0,25	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+\frac{1}{x}=2 \end{cases}$	0,25	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$ Vậy hệ có tập nghiệm $S=\{(1;1)\}$.	0,25	
2 (3,0đ)	1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=ax^2$ qua $M(\sqrt{3};3)$ và đường thẳng $(d): y=-\frac{1}{2}x+m$ (với m là tham số). Xác định phương trình của parabol (P), từ đó tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khác gốc tọa độ, sao cho $\frac{y_A}{x_B}+\frac{y_B}{x_A}=\frac{25}{16}$.	1,25	
	$M(\sqrt{3};3) \in (P): y=ax^2 \Leftrightarrow 3=a(\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow a=1$	0,25	
	Vậy parabol $(P): y=x^2$	0,25	

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = -\frac{1}{2}x + m$ $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2m = 0$ có $\Delta = 1 + 16m$ Đề đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khác gốc tọa độ $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{16}$ và $m \neq 0$.	0,25
Theo định lý Vi-et, ta có: $x_A + x_B = -\frac{1}{2}, x_A \cdot x_B = -m$ $\frac{y_A}{x_B} + \frac{y_B}{x_A} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{x_A^2}{x_B} + \frac{x_B^2}{x_A} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{x_A^3 + x_B^3}{x_A \cdot x_B} = \frac{25}{16}$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{(x_A + x_B)^3 - 3x_A \cdot x_B (x_A + x_B)}{x_A \cdot x_B} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3(-m)\left(-\frac{1}{2}\right)}{-m} = \frac{25}{16}$ $\Leftrightarrow \frac{-\frac{1}{8} - \frac{3}{2}m}{-m} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow -2 - 24m = -25m$ $\Leftrightarrow m = 2$ (thỏa điều kiện).	0,25
2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + 1 = 0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + nx + 1 = 0$, với m, n là các tham số thỏa mãn $m \geq 2, n \geq 2$. Chứng minh rằng: $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = n^2 - m^2$.	0,75
Theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3 + x_4 = -n \\ x_3 x_4 = 1 \end{cases}$	0,25
Ta có: VT = $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$ $= [x_1 x_2 - x_3(x_1 + x_2) + x_3^2][x_1 x_2 + x_4(x_1 + x_2) + x_4^2]$	0,25
$= (1 + mx_3 + x_3^2)(1 - mx_4 + x_4^2)$	
$= (mx_3 - nx_3)(-mx_4 - nx_4)$	0,25
$= (n - m)x_3(m + n)x_4$	
$= n^2 - m^2 = VP$.	0,25
3) Cho hai số thực x, y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 10(x - y) + 21 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - y + 2$.	1,0
Viết lại biểu thức đã cho thành $(x - y + 2)^2 + 6(x - y + 2) + 5 = -y^2$.	0,25
Như vậy với mọi x và mọi y ta luôn có $S^2 + 6S + 5 \leq 0$ (với $S = x - y + 2$)	0,25
Suy ra: $(S + 5)(S + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq S \leq -1$. Do đó:	0,25
Giá trị nhỏ nhất của S bằng -5 khi $\begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \end{cases}$ Giá trị lớn nhất của S bằng -1 khi $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$.	0,25

3 (1,0đ)	Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.	1,0
	Ta có: $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \Leftrightarrow yx^2 - (y+2)x + y+1 = 0$.	0,25
	$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (không thỏa). $y \neq 0$, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = (y+2)^2 - 4y(y+1) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.	0,25
	Vì $y \in \mathbb{Z}$ và $y \neq 0$ nên $y \in \{-1; 1\}$. $y = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.	0,25
	$y = -1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 0$. Vậy có 4 cặp số cần tìm là $(1; 1), (2; 1), (-1; -1), (0; -1)$.	0,25
4 (3,0đ)	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , có ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) cắt nhau tại H . Tia AO cắt BC tại M và cắt (O) tại N , gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC .	3,0
	1) Chứng minh: DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.	1,0
	Hình vẽ	0,25
		
	Chứng minh đúng hai tứ giác $BFHD, CEHD$ nội tiếp.	
	Suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}; \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$ Mà $\widehat{HBF} = \widehat{HCE}$ (cùng phụ với góc A) Nên: $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$	0,25
	Vậy DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$.	0,25
	2) Chứng minh: $\frac{HE}{HF} = \frac{NC}{NB}$.	1,0
	Ta có: $NC \perp AC$ nên $NC \parallel BH$. Tương tự, ta có $NB \parallel CH$. Suy ra $BHCN$ là hình bình hành.	0,25
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp, suy ra: $\widehat{FEH} = \widehat{BCH}$ và $\widehat{FBH} = \widehat{ECH}$ nên hai tam giác $\triangle HFE \sim \triangle HBC$.	0,25
	Do đó, hai tam giác $\triangle HFE \sim \triangle NCB$.	0,25
	Suy ra $\frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$.	0,25

	3) Chứng minh: $HE.MQ.HB = HF.MP.NC$	1,0
	$MQ \parallel NC$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \frac{MQ}{NC} = \frac{AM}{AN}$ $MP \parallel NB$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \frac{MP}{NB} = \frac{AM}{AN}$	0,25
	$\frac{MQ}{NC} = \frac{MP}{NB} \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{MP}{MQ}$.	0,25
	Mà $\frac{HE}{HF} = \frac{NB}{NC}$, suy ra $\frac{HE}{HF} = \frac{MP}{MQ} \Rightarrow HE.MQ = HF.MP$.	0,25
	Lại có $HB = NC$ (do $HBNC$ là hình bình hành). Vậy: $HE.MQ.HB = HF.MP.NC$	0,25

----- **HẾT** -----