

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 1)}$.

2) Với a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 3$, tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}.$$

Bài II (2,0 điểm)

1) Với p là số nguyên tố lớn hơn 3, chứng minh số $A = 5^p + p^2$ chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 - x^2y + 2x = 5x^2 - 2y - 1$.

Bài III (2,0 điểm)

1) Với a, b và c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$, chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a + b - c) \geq -\frac{9}{4}.$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b và c sao cho các phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$, $x^2 - 2bx + c = 0$ và $x^2 - 2cx + a = 0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC .

1) Chứng minh $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$.

2) Chứng minh đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK .

3) Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF . Chứng minh đường thẳng DP song song với đường thẳng AI .

Bài V (1,0 điểm)

Trên bảng có hai số tự nhiên m và n . An và Bình chơi một trò chơi như sau: Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một trong hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên:

1) Với $m = 2022$ và $n = 2023$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

2) Với $m = 2022$ và $n = 1981$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

..... Hết