

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2022$. Tính giá trị

của biểu thức $Q = \frac{(2022 + a^2)(2022 + b^2)(2022 + c^2)}{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}$.

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2 - (m + 3)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác không thỏa mãn giá trị của biểu

thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ là một số nguyên.

Câu 3. (1,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số là các số nguyên. Biết rằng a, b, c là ba số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = P(b) = P(c) = 2022$. Hỏi phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên không? Vì sao?

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho: $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho A là một tập con của tập số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi phần tử x thuộc A ($x \neq 1$) luôn biểu diễn được dưới dạng $x = a + b$ trong đó a, b thuộc A (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất.

Giải thích cách tìm?

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC . Gọi I là trung điểm cạnh BC , P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh $PB \cdot PC = PE \cdot PF$ và KE song song với BC ;

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q .

Chứng minh tứ giác $BIQF$ nội tiếp.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho ba điểm A, B, C phân biệt theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Qua điểm B kẻ đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AC ; D là một điểm di động trên đường thẳng d ($D \neq B$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng d tại điểm E khác D . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên các đường thẳng AD và AE . Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng BQ và CD , S là giao điểm của hai đường thẳng BP và CE . Chứng minh:

a) Tứ giác $PQSR$ nội tiếp;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQSR$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm D di động trên đường thẳng d .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm có 01 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Bản hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

- Giám khảo cần nắm vững yêu cầu của hướng dẫn chấm để đánh giá đúng bài làm của thí sinh. Thí sinh làm cách khác đáp án nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Khi vận dụng đáp án và thang điểm, giám khảo cần chủ động, linh hoạt với tinh thần trân trọng bài làm của học sinh.
- Nếu có việc chi tiết hóa điểm các ý cần phải đảm bảo không sai lệch với tổng điểm và được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu hỏi trong đề thi, chấm điểm lẻ đến 0,25 và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2022$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{(2022 + a^2)(2022 + b^2)(2022 + c^2)}{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}.$$

Lời giải

Ta có: $2022 + a^2 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$.

$$\text{Tương tự } \begin{cases} 2022 + b^2 = (b + a)(b + c) \\ 2022 + c^2 = (c + a)(c + b) \end{cases}.$$

Thay vào Q ta được $Q = 1$.

Câu 2. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2 - (m + 3)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác không thỏa mãn giá trị của biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ là một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m + 3)^2 - 4(m + 1) = m^2 + 2m + 5 = (m + 1)^2 + 4$.

$\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, khác không khi và chỉ khi $m \neq -1$.

Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$.

$$A = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)^2 - 2 = \left[\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} \right]^2 - 2$$

$$= \left(\frac{m^2 + 4m + 7}{m+1} \right)^2 - 2 = \left(m + 3 + \frac{4}{m+1} \right)^2 - 2.$$

Với m nguyên dương, biểu thức A có giá trị nguyên $\Leftrightarrow 4 : (m+1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=1 \\ m+1=2 \\ m+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \text{ (l)} \\ m=1 \text{ (t/m)} \\ m=3 \text{ (t/m)} \end{cases}$

Vậy $m=1, m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho đa thức $P(x)$ có tất cả các hệ số là các số nguyên. Biết rằng a, b, c là ba số nguyên phân biệt thỏa mãn $P(a) = P(b) = P(c) = 2022$. Hỏi phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên không? Vì sao?

Lời giải

Ta có $P(a) = P(b) = P(c) = 2022 \Leftrightarrow P(a) - 2022 = P(b) - 2022 = P(c) - 2022 = 0$

Khi đó: a, b, c là 3 nghiệm phân biệt của đa thức $P(x) - 2022$.

Do đó, tồn tại đa thức $Q(x)$ có các hệ số là các số nguyên sao cho:

$$P(x) - 2022 = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x).$$

Giả sử, phương trình $P(x) - 2023 = 0$ có nghiệm nguyên $x = d$.

$$\text{Khi đó, } P(d) - 2023 = 0 \Leftrightarrow P(d) - 2022 = 1.$$

$$\text{Ta lại có, } P(d) - 2022 = (d-a)(d-b)(d-c)Q(d).$$

$$\text{Vậy } (d-a)(d-b)(d-c)Q(d) = 1 = 1.1 = (-1) \cdot (-1). \quad (1)$$

$d-a, d-b, d-c$ là 3 số nguyên phân biệt. $Q(d)$ là số nguyên.

Do đó, từ (1) suy ra $d-a \in \{-1; 1\}; d-b \in \{-1; 1\}; d-c \in \{-1; 1\}$.

Theo nguyên lý Đê - rích - lê thì có ít nhất 2 trong ba số $d-a, d-b, d-c$ bằng nhau.

Điều này mâu thuẫn với $d-a, d-b, d-c$ là 3 số nguyên phân biệt.

Vậy điều giả sử là sai.

Tóm lại: Phương trình $P(x) - 2023 = 0$ không có nghiệm nguyên.

Câu 4. (1,0 điểm)

Tìm các số nguyên tố a, b, c sao cho: $a^4 + b^4 + c^4 + 54 = 11abc$.

Lời giải

$$\text{- TH 1: } \begin{cases} a \neq 3 \\ b \neq 3 \\ c \neq 3 \end{cases}$$

Vì a, b, c là các số nguyên tố nên khi đó

$$a^4 \equiv 1 \pmod{3}, b^4 \equiv 1 \pmod{3}, c^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Ta có: $a^4 + b^4 + c^4 + 54 \equiv 0 \pmod{3}; 11abc \equiv 1 \pmod{3}$ hoặc $11abc \equiv 2 \pmod{3}$. Vậy trường hợp này không thỏa mãn.

- TH 2: Trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 3. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 3$.

$$\text{Ta có: } 3^4 + b^4 + c^4 + 54 = 33bc \Leftrightarrow b^4 + c^4 + 135 = 33bc. \quad (*)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 33bc \equiv 0 \pmod{3} \\ 135 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ nên } b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Mặt khác b, c là các số nguyên tố nên $b^4 \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $b^4 \equiv 1 \pmod{3}$; $c^4 \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $c^4 \equiv 1 \pmod{3}$.

Vậy từ $b^4 + c^4 \equiv 0 \pmod{3}$ ta có: $\begin{cases} b^4 \equiv 0 \pmod{3} \\ c^4 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$.

Do b, c là các số nguyên tố nên $b = c = 3$.

Thay $b = c = 3$ vào (*) ta thấy thoả mãn.

Tóm lại $a = b = c = 3$ là các số nguyên tố thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho A là một tập con của tập số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập A có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi phần tử x thuộc A ($x \neq 1$) luôn biểu diễn được dưới dạng $x = a + b$ trong đó a, b thuộc A (a có thể bằng b). Hãy tìm một tập A có số phần tử nhỏ nhất. Giải thích cách tìm?

Lời giải

Giả sử A có số phần tử là n , ta sắp xếp chúng theo thứ tự $1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 100$. (1)

Suy ra với mỗi $k \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$ ta có $x_{k+1} = x_i + x_j \leq x_k + x_k = 2x_k$, với $1 \leq i, j \leq k$. (2)

Áp dụng kết quả (2) ta thu được $x_2 \leq 1+1 = 2$, $x_3 \leq 2+2 = 4$, $x_4 \leq 8$, $x_5 \leq 16$, $x_6 \leq 32$, $x_7 \leq 64$.

Suy ra tập A phải có ít nhất 8 phần tử.

+ Giả sử $n = 8 \Rightarrow x_8 = 100$.

Vì $x_6 + x_7 \leq 32 + 64 = 96 < 100 \Rightarrow x_8 = 2x_7 \Rightarrow x_7 = 50$.

Vì $x_5 + x_6 \leq 16 + 32 = 48 < 50 \Rightarrow x_7 = 2x_6 \Rightarrow x_6 = 25$.

Vì $x_4 + x_5 \leq 8 + 16 = 24 < 25 \Rightarrow x_6 = 2x_5 \Rightarrow x_5 = \frac{25}{2}$. (mâu thuẫn)

+ Với $n = 9$ ta có tập $A = \{1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tập A có phần tử nhỏ nhất là 9.

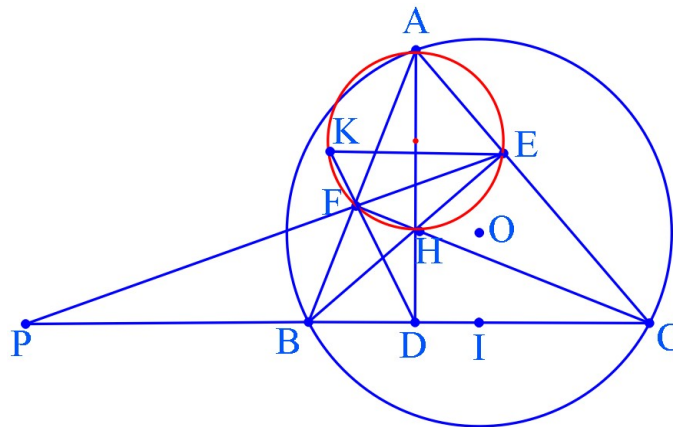
Câu 6. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC . Gọi I là trung điểm cạnh BC , P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC . Đường thẳng DF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là K .

a) Chứng minh $PB \cdot PC = PE \cdot PF$ và KE song song với BC ;

b) Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q . Chứng minh tứ giác $BQCF$ nội tiếp.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp
 $\Rightarrow \Delta PFB \sim \Delta PCE (g \cdot g) \Rightarrow PB \cdot PC = PE \cdot PF$ (1)

Các tứ giác $BFHD, HEKF$ nội tiếp nên

$$\widehat{EBC} = \widehat{HBD} = \widehat{HFD} = \widehat{HEK} = \widehat{BEK} \Rightarrow KE \parallel BC.$$

b) Hai tam giác PHE và PFQ có

$$\widehat{HPE} = \widehat{HPF}, \widehat{PEH} = \widehat{PQF} \Rightarrow \triangle PHE \sim \triangle PFQ (g.g) \Rightarrow PH.PQ = PF.PE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $PB \cdot PC = PH \cdot PQ$.

Hai tam giác PBQ và PHC có

$$\widehat{BPQ} = \widehat{HPC}, \frac{PB}{PH} = \frac{PQ}{PC} \Rightarrow \triangle PBQ \sim \triangle PHC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PCH} \Rightarrow \text{tứ giác } BHQC \text{ nội tiếp.}$$

Khi đó $\widehat{FQB} = \widehat{FQH} + \widehat{HQB} = \widehat{FEH} + \widehat{HCB} = 2\widehat{FCB} = \widehat{FIB}$.

Vậy tứ giác $BIQF$ nội tiếp.

Câu 7. (2,0 điểm)

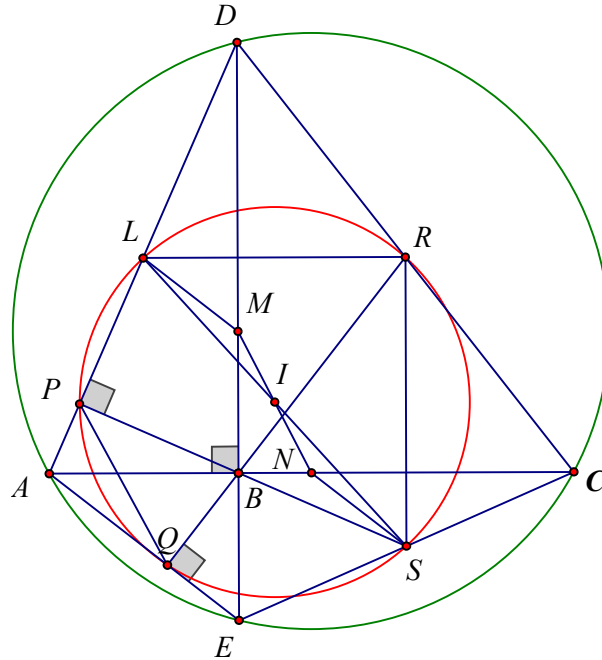
Cho ba điểm A, B, C phân biệt theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng. Qua điểm B kẻ đường thẳng d vuông góc với đường thẳng AC ; D là một điểm di động trên đường thẳng d ($D \neq B$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường thẳng d tại điểm E khác D . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm B trên các đường thẳng AD và AE . Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng BQ và CD , S là giao điểm của hai đường thẳng BP và CE .

Chứng minh:

a) Tứ giác $PQSR$ nội tiếp;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQSR$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi điểm D di động trên đường thẳng d .

Lời giải



a) Do tứ giác $ADCE$ nội tiếp nên $\widehat{ADE} = \widehat{ACE}$, từ đó $\widehat{SBC} = \widehat{ABP} = \widehat{ACE}$.

Suy ra $SB = SC$. Tương tự, ta có $\widehat{SEB} = \widehat{SBE}$ nên $SC = SE$, suy ra S là trung điểm CE . Chứng minh tương tự, ta cũng có R là trung điểm CD .

Do $RB = RC, SB = SC$ nên $\triangle SRB = \triangle SRC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BSR} = \widehat{CSR} = \widehat{BEC} = \widehat{BAP} = \widehat{BQP}$.

Do đó tứ giác $PQSR$ nội tiếp.

b) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQSR$.

Gọi L là trung điểm của AD . Ta có $RL \parallel AC$ và $RS \parallel DE$, do đó $\widehat{LRS} = 90^\circ$.

Suy ra LS là đường kính của đường tròn (I).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng DE và AC .

Khi đó N là điểm cố định. Lại có $ML \parallel AE, NS \parallel AE$ và $ML = NS = \frac{1}{2}AE$ nên tứ giác MLNS là

hình bình hành, suy ra I là trung điểm MN . Mà $\widehat{MBN} = 90^\circ$ nên $IN = IB$.

Vậy I thuộc đường trung trực đoạn thẳng BN cố định.

---- **Hết**----