

Câu I (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của x để A = 3

Câu II (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m+1)x - m + 5$. Tìm giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ sao cho $x_1; x_2$ là các số nguyên.

2. Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0$

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2x + 4y - 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases}$

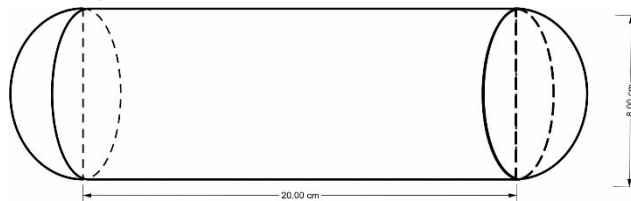
Câu IV (3,0 điểm).

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.

a) Chứng minh tứ giác BFEC nội tiếp, từ đó suy ra $KF \cdot KE = KB \cdot KC$.

b) Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M (M khác A). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.

2. Một chi tiết máy gồm hai nửa hình cầu bằng nhau và một hình trụ (hình vẽ). Hãy tính thể tích của chi tiết máy đó theo các kích thước cho trên hình vẽ.



Câu V (3,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4xy + 2yz + 3xz = 24$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 9}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 16}}$.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Phòng thi số:

Số báo danh: Chữ ký của cán bộ coi thi:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} \right) \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{b) } A=3 &\Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}}=3 \\ &\Leftrightarrow x+2=3\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(l) \\ x=4(n) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $A=3$ khi $x=4$

Câu II.

1) Hoàn chỉnh giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = (m+1)x - m + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 5 = 0 (*)$$

Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(m-5)$

$$= m^2 - 2m + 21$$

$$= (m-1)^2 + 20 > 0$$

Nên (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B

$$\text{Theo hệ thức vi-et } \begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 \cdot x_2 = m-5 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = m(x-1)$$

Xét $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình

$$\Rightarrow x - \frac{5}{x-1} = m \quad (1)$$

Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ nên $m+1$ và $m-5$ là các số nguyên do đó m cũng là số nguyên

Từ (1) ta có

$$m \in \mathbb{Z} \text{ khi } \left(x - \frac{5}{x-1} \right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \in \mathbb{Z} \\ 5:(x-1) \end{cases}$$

Suy ra $m = -3; m = 5$

$$\begin{cases} x-1=-5 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow m=-3 \\ x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m=5 \\ x-1=5 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow m=5 \\ x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow m=-3 \end{cases}$$

Vậy $m = -3; m = 5$ thỏa yêu cầu bài toán

$$2) x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 4x + 8x + 8 = 16y^2 + 16y + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)x^3 + 3x^2(x+1) + 4x(x+1) + 8(x+1) = 16y^2 + 16y + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 3x^2 + 4x + 8) = (4y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x + 8) = (4y+2)^2$$

$$\forall y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4y+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(x+1)^2$ và $(4y+2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $(x^2 - 4x + 8)$ cũng là số chính phương

$$\text{Đặt } x^2 - 4x + 8 = m \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 4 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - m^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow (x-2-m)(x-2+m) = -4^{(*)}$$

$$\text{Do } x-2-m < x-2+m$$

$$\text{Nên } \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-m=-4 \\ x-2+m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ m=5/2 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2-m=-2 \\ x-2+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ m=2 \end{cases} \quad (\text{n})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2-m=-1 \\ x-2+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7/2 \\ m=5/2 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\bullet x = -2 \Rightarrow (4y+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+2=2 \\ 4y+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=0 \\ 4y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm nguyên thỏa ycbt là: $(-2; 0); (-2; -1)$

Câu III.

$$1) \sqrt{\frac{3x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1$$

$$\text{ĐK: } 1 < x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 3x-2 = x-1 + 3-x + 2\sqrt{(x-1)(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow 3x-4 = 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \quad (*)$$

$$(*) \text{ có điều kiện: } 3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4/3$$

$$(*) \Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 16 = 4(x-1)(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 24x + 16 = -4x^2 + 16x - 12$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 40x + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(n) \\ x = \frac{14}{13}(l) \end{cases}$$

vậy nghiệm của phương trình: $x = 2$

$$2) \begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2x + 4y - 1 \\ xy + x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 2(1 - xy) - 1 \\ x + 2y = 1 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 + 3xy = 1(1) \\ x + 2y = 1 - xy(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 3xy - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 - 1^3 - 3xy(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1) \left[(x + y)^2 + x + y + 1 - 3xy \right]$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Với $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y$ thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 1 - y + 2y = 1 - (1 - y)y \Leftrightarrow y(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với: } x^2 + y^2 - xy + x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

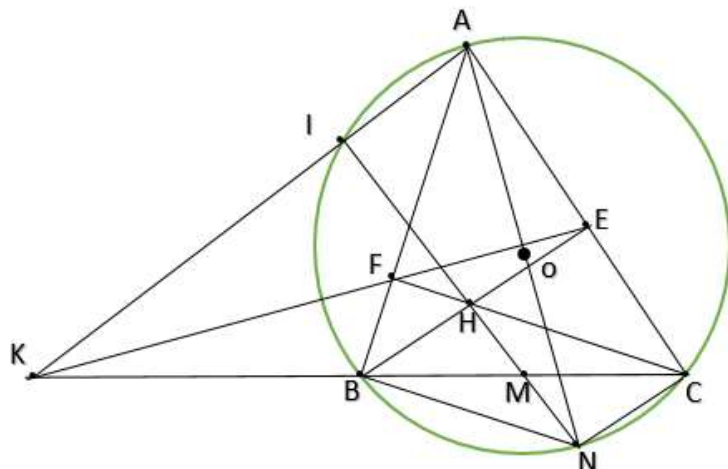
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1; 0), (2; -1), (-1; -1)$

Câu IV.

1)



a)

- xét tứ giác $BFEC$ có :

$$\widehat{BEC} = \widehat{CFB} = 90^0$$

$\Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp (2 góc cùng nhìn một cạnh bằng nhau)

- xét $\triangle KEF$ và $\triangle KBE$ có :

$\widehat{K}$ là góc chung

$$\widehat{KCF} = \widehat{KEB} \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BF)}$$

$\Rightarrow \triangle KEF$ đồng dạng với $\triangle KBE$

$$\Rightarrow \frac{KF}{KB} = \frac{KC}{KE} \Leftrightarrow KF \cdot KE = KC \cdot KB \quad (\text{đ.p.c.m}) \quad (1)$$

b) Ta có: $\triangle KIB$ đồng dạng $\triangle KBA$ (g . g)

$$\Rightarrow \frac{KI}{KB} = \frac{KC}{KA} \Leftrightarrow KI \cdot KA = KB \cdot KC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $KE \cdot KF = KI \cdot KA$

$$\Leftrightarrow \frac{KE}{KI} = \frac{KA}{KF}$$

Mà $\widehat{K}$ là góc chung

Suy ra $\triangle KEA$ đồng dạng $\triangle KIF \Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{KIF}$

$\Rightarrow$ tứ giác $IAEF$ nội tiếp (góc trong bằng góc đối ngoài)

Mặt khác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH ($\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$)

Nên: I, A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn đường kính AH

$$\Rightarrow \widehat{IHA} = 90^0$$

Mà : $\widehat{NIA} = 90^0$ (góc chắn nửa đường tròn)

Suy ra : N, I, H thẳng hàng

Kẻ đường kính AN của đường tròn (O) ; $N \in (O)$

Xét tứ giác $BHCN$ có :

$BH \parallel CN$ (cùng vuông góc với AB)

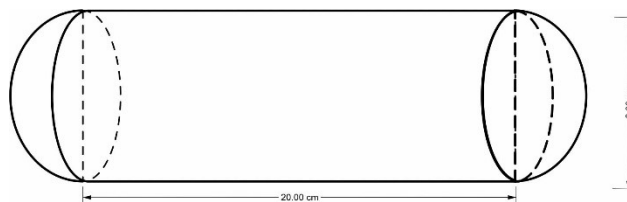
$CH \parallel BN$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow BHCN$ là hình bình hành

Mà M là trung điểm của $BC \Rightarrow M \in HN$

Suy ra M, I, H thẳng hàng

2)



$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi + R^2 \pi \cdot 20$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 4^3 \cdot \pi + 20 \cdot 4^2 \cdot \pi$$

$$= \frac{1216}{3} \pi (cm^3)$$

Câu V:

Ta có: $4xy + 2yz + 3xz = 24 \Leftrightarrow \frac{xy}{6} = \frac{yz}{12} = \frac{xz}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} + \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{4} + \frac{x}{2} \cdot \frac{z}{4} = 1$

Đặt $\frac{x}{2} = a > 0; \frac{y}{3} = b > 0; \frac{z}{4} = c > 0 \Rightarrow ab + bc + ac = 1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{4a}{\sqrt{4a^2 + 4}} + \frac{3b}{\sqrt{9b^2 + 9}} + \frac{4c}{\sqrt{16c^2 + 16}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{a^2 + ab + bc + ca}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + ab + bc + ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + ab + bc + ac}} \\ &= \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ &= \sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c}} + \sqrt{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{b}{2(b+c)}} + \sqrt{\frac{c}{2(b+c)} \cdot \frac{2c}{a+c}} \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} &\geq 2\sqrt{\frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a+c}} \\ \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} &\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{b}{2(b+c)}} \\ \frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} &\geq 2\sqrt{\frac{c}{2(b+c)} \cdot \frac{2c}{a+c}} \\ p &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2a}{a+c} + \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2(b+c)} + \frac{c}{2(b+c)} + \frac{2c}{a+c} \right) \\ &\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2(a+b)}{a+b} + \frac{2(a+c)}{a+c} + \frac{b+c}{2(b+c)} \right) \\ &\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(2 + 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow P \leq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{2a}{a+b} = \frac{2a}{a+c} \\ \frac{2b}{a+b} = \frac{b}{2(b+c)} \\ \frac{c}{2(b+c)} = \frac{2c}{a+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a+b=8b \\ a+c=8c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=7b \\ a=7c \end{cases}$$

$$ab + bc + ac = 1 \Leftrightarrow 7b^2 + b^2 + 7b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{15} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{15}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow z = \frac{4}{\sqrt{15}} \\ a = \frac{7}{\sqrt{15}} \Rightarrow x = \frac{14}{\sqrt{15}} \end{cases}$$