

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (Chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 14-16/6/2022

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{507} + \sqrt{13} - \sqrt{48}} - 25.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + x^2 = y^3 + y^2$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$. Tìm các hệ số a, b biết rằng (d) đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ và có đúng một điểm chung với (P).

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x + 2y - 4xy = 3 \\ 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4xy = 3 \end{cases}.$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng đường kính NP của đường tròn (O) vuông góc với BC tại M (P nằm trên cung nhỏ BC). Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AP tại I.

a) Chứng minh $PI = PB$.

b) Chứng minh $\widehat{IMB} = \widehat{INA}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và có tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Lấy điểm D bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$ (AD không vuông góc với BC).

a) Chứng minh bốn điểm B, C, D, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh OD là đường phân giác ngoài của $\widehat{BDC}$ và tổng $BD + CD$ bằng hai lần khoảng cách từ A đến đường thẳng OD.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4 + x^2 + y^2} + \frac{1}{4 + y^2 + z^2} + \frac{1}{4 + z^2 + x^2}.$$

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

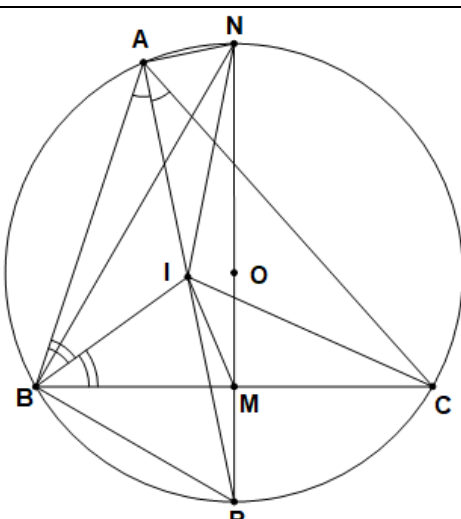
* Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

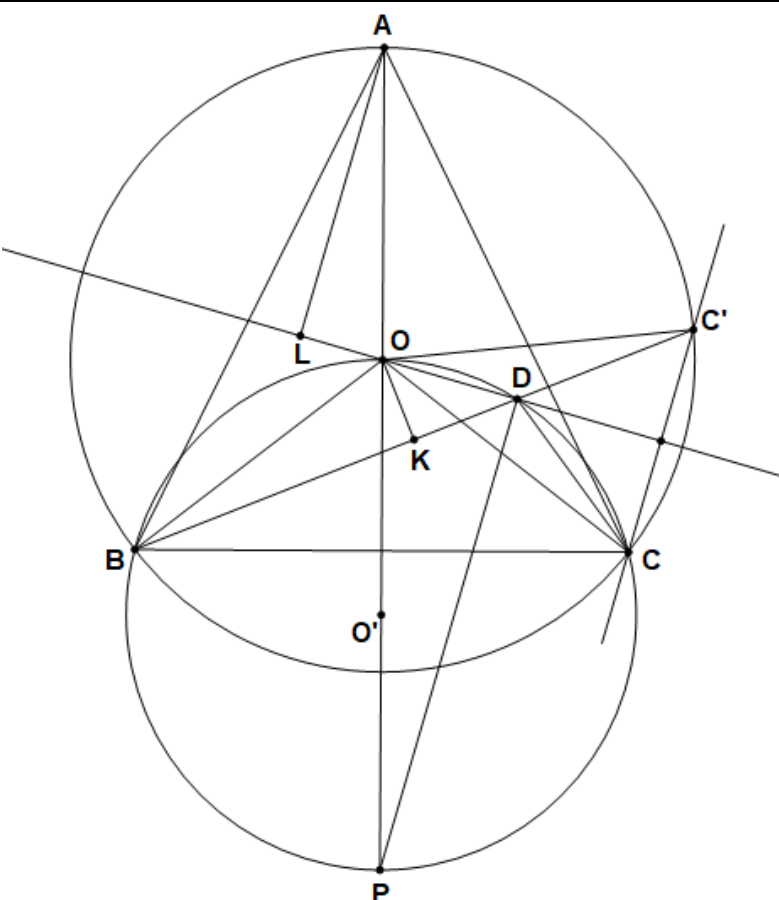
(Hướng dẫn chấm gồm 07 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0)	a) Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn biểu thức $A = \sqrt[3]{\sqrt{507} + \sqrt{13} - \sqrt{48}} - 25$	1,0
	$A = \sqrt[3]{13\sqrt{3} + \sqrt{13} - 4\sqrt{3}} - 25$	0,25
	$A = \sqrt[3]{13\sqrt{3} + \sqrt{(1-2\sqrt{3})^2}} - 25$	0,25
	$A = \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26}$	0,25
	$A = \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = \sqrt{3} - 2$	0,25
	b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3 + x^2 = y^3 + y^2$	1,0
	Ta có: $x^3 + x^2 = y^3 + y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + y^2 + xy + x + y) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2 + y^2 + xy + x + y = 0 \end{cases}$	0.25
	- Khi $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$. Khi đó $(x; y) = (m; m)$ (m là số nguyên tùy ý)	
	- Khi $x^2 + y^2 + xy + x + y = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$.	0.25
	Suy ra trong ba giá trị $(x+y)^2, (x+1)^2, (y+1)^2$ có một giá trị bằng 0, hai giá trị bằng 1. Giải tìm được: $(x; y) = (0; 0), (x; y) = (0; -1), (x; y) = (-1; 0)$. Vậy các cặp số thỏa đề là: $(x; y) = (m; m)$ (m là số nguyên tùy ý), $(x; y) = (0; -1), (x; y) = (-1; 0)$.	0.25
	Nhận xét: $x^2 + y^2 + xy + x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)x + y^2 + y = 0$ (*) + Phương trình (*) có nghiệm theo x khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 4(y^2 + y) \geq 0 \Leftrightarrow (y+1)(-3y+1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3} \quad (y \in \mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = 0$.	0.25
	+ Với $y = 0$, giải tìm được $x = 0, x = -1$. + Với $y = -1$, giải tìm được $x = 0$.	0.25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 2 (1,0)	Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$. Tìm các hệ số a, b biết rằng (d) đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ và có đúng một điểm chung với (P).	1,0
	+ (d): $y = ax + b$ đi qua $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ nên $a + b = \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} - a$.	0,25
	+ Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $2x^2 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 = ax + \frac{3}{2} - a \Leftrightarrow 4x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0 (*)$	0,25
	+ (d) và (P) có đúng một điểm chung khi phương trình (*) có một nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4(2a - 3) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 6 \end{cases}$	0,25
	+ $a = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, a = 6 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$ Vậy $a = 2, b = -\frac{1}{2}$ hoặc $a = 6, b = -\frac{9}{2}$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	a) Giải phương trình $3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0$.	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.	0,25
	$3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3-x}(3-\sqrt{3+x}) - 2x(\sqrt{3+x}-3) = 0$ $\Leftrightarrow (3-\sqrt{3+x})(\sqrt{3-x}+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\sqrt{3+x} = 0 \\ \sqrt{3-x}+2x = 0 \end{cases}$	0,25
	$+ 3-\sqrt{3+x} = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (loại)	0,25
	$+ \sqrt{3-x}+2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 3-x = (-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa điều kiện) Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x + 2y - 4xy = 3 \\ 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4xy = 3 \end{cases}$	1,0
	$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x + 2y - 4xy = 3 \\ 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y = 3 \\ 4x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 4y = 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 + 2(2x+y) = 3 \\ (2x+y)^2 + 2(x-2y) = 3 \end{cases}$	0,25
Câu 3 (2,0)	Đặt $x-2y = a$, $2x+y = b$, khi đó ta có hệ: $\begin{cases} a^2 + 2b = 3 \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 + 2b - 2a = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) - 2(a-b) = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0 \Leftrightarrow a = b$ hoặc $a+b = 2$	0,25
	- Với $a = b$, ta có $a^2 + 2a = 3 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = -3$. + Khi $a = 1$ thì $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = 1 \\ 2x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ + Khi $a = -3$ thì $\begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = -3 \\ 2x+y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$	0,25
	- Với $a+b = 2 \Leftrightarrow a = 2-b$, khi đó $b^2 + 2(2-b) = 3 \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1$ (Trường hợp này trùng trường hợp trên). Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ và $(x; y) = \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5}\right)$.	0,25
	Nhận xét 1: Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất ta được: $3x^2 - 3y^2 - 2x - 6y + 8xy = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 6xy + 9y^2) - 30y^2 - 10xy - 2x - 6y = 0$ $\Leftrightarrow 3(x+3y)^2 - 10y(3y+x) - 2(x+3y) = 0 \Leftrightarrow (x+3y)(3x-y-2) = 0$ Nhận xét 2: Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất ta được: $3x^2 - 3y^2 - 2x - 6y + 8xy = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(1-4y)x - 3y^2 - 6y = 0$ (*) Phương trình (*) là phương trình bậc hai theo x có $\Delta' = (1+5y)^2$. Suy ra được: $x = -3y$, $x = \frac{y+2}{3}$. Thế lần lượt từng giá trị x vào một trong hai phương trình giải tìm y .	

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 4 (2,0)	Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng đường kính NP của đường tròn (O) vuông góc với BC tại M (P nằm trên cung nhỏ BC). Tia phân giác của $\widehat{ABC}$ cắt AP tại I.  (Hình vẽ phục vụ câu a: 0,25 điểm)	
	a) Chứng minh $PI = PB$.	0,75
	Ta có $\widehat{BAP} = \widehat{CAP}$ (vì $sđ \widehat{BP} = sđ \widehat{CP}$).	0,25
	$\widehat{BIP} = \widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{PAC} + \widehat{CBI} = \widehat{PBC} + \widehat{CBI} = \widehat{PBI}$. Suy ra tam giác PBI cân tại P . Do đó $PI = PB$.	0,5
	b) Chứng minh $\widehat{IMB} = \widehat{INA}$.	1,0
	+ Trong tam giác vuông BNP tại B có: $BP^2 = MP \cdot NP \Rightarrow \frac{BP}{MP} = \frac{NP}{BP}$ hay $\frac{IP}{MP} = \frac{NP}{IP}$.	0,25
	+ Hai tam giác PMI và PIN có: $\widehat{IPM} = \widehat{NPI}$ và $\frac{IP}{MP} = \frac{NP}{IP}$ nên hai tam giác này đồng dạng. Suy ra $\widehat{PMI} = \widehat{PIN}$.	0,5
	+ Ta có $\widehat{IMB} = \widehat{PMI} - 90^\circ$, $\widehat{INA} = \widehat{PIN} - \widehat{IAN} = \widehat{PMI} - 90^\circ$. Suy ra $\widehat{IMB} = \widehat{INA}$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5 (2,0)	Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và có tâm đường tròn ngoại tiếp là O. Lấy điểm D bên trong tam giác ABC sao cho $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$ (AD không vuông góc với BC).  (Hình vẽ phục vụ câu a: 0,25 điểm)	0,25
	a) Chứng minh bốn điểm B, C, D, O cùng nằm trên một đường tròn.	0,75
	Ta có $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$ (gt), $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$ (t/c góc ở tâm) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BOC}$.	0,5
	Mà O, D nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên bốn điểm B, C, D, O cùng nằm trên một đường tròn.	0,25
	b) Chứng minh OD là đường phân giác ngoài của $\widehat{BDC}$ và tổng $BD + CD$ bằng hai lần khoảng cách từ A đến đường thẳng OD .	1,0
	- Dựng đường kính OP của đường tròn (O') đi qua 4 điểm B, O, D, C. $\Rightarrow \widehat{BDP} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{BP}, \widehat{CDP} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CP}$. + $OP \perp BC \Rightarrow \text{sđ } \widehat{BP} = \text{sđ } \widehat{CP} \Rightarrow \widehat{BDP} = \widehat{CDP}$. Do đó DP là đường phân giác trong của $\widehat{BDC}$. Lại có $OD \perp DP \Rightarrow OD$ là đường phân giác ngoài của $\widehat{BDC}$.	0,25
	+ Dựng đường thẳng qua C , vuông góc với OD và cắt đường thẳng BD tại C' .	0,25
	+ Vì OD là đường phân giác ngoài của $\widehat{BDC}$ nên $DC = DC'$ và $OC = OC'$ (C' nằm trên đường tròn (O)).	
	+ Ta có: $BD + CD = BD + DC' = BC' = 2BK$ (với K là trung điểm của BC').	0,25
	+ Hạ AL vuông góc với đường thẳng OD tại L .	
	- Xét hai tam giác vuông ALO và BKO có: + $OA = OB$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). + $\widehat{OAL} = \widehat{OPD}$ (so le trong) Suy ra hai tam giác ALO và BKO bằng nhau. Do đó $BK = AL$. Suy ra $BD + CD = 2AL$ (điều cần chứng minh).	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 6 (1,0)	Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4+x^2+y^2} + \frac{1}{4+y^2+z^2} + \frac{1}{4+z^2+x^2}.$	1,0
	$4P = \frac{4}{4+x^2+y^2} + \frac{4}{4+y^2+z^2} + \frac{4}{4+z^2+x^2} = 1 - \frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2} + 1 - \frac{y^2+z^2}{4+y^2+z^2} + 1 - \frac{z^2+x^2}{4+z^2+x^2}$ $= 3 - \left(\frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2} + \frac{y^2+z^2}{4+y^2+z^2} + \frac{z^2+x^2}{4+z^2+x^2} \right)$	0,25
	$= 3 - \frac{1}{2} \left[\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{4+x^2+y^2} + \frac{(y+z)^2 + (y-z)^2}{4+y^2+z^2} + \frac{(z+x)^2 + (z-x)^2}{4+z^2+x^2} \right]$ $= 3 - \frac{1}{2} \left[\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2} + \frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2} + \frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{(x-y)^2}{4+x^2+y^2} + \frac{(y-z)^2}{4+y^2+z^2} + \frac{(z-x)^2}{4+z^2+x^2} \right]$ $\leq 3 - \frac{1}{2} \left[\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2} + \frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2} + \frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2} \right] (*)$	0,25
	Ta có: $\frac{(x+y)^2}{4+x^2+y^2} + \frac{(y+z)^2}{4+y^2+z^2} + \frac{(z+x)^2}{4+z^2+x^2} \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+12} = \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$ Ta đi chứng minh: $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geq 2$ (**).	0,25
	Thật vậy $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geq 2 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2+6 \Leftrightarrow xy+yz+zx \geq 3$ $xy+yz+zx \geq 3$ là bất đẳng thức đúng vì $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$ (bđt Cô si)	
	Từ (*) và (**) suy ra $4P \leq 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}$ (Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$). Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là bằng $\frac{1}{2}$.	0,25
	Cách khác: $P \leq \frac{1}{4+2xy} + \frac{1}{4+2yz} + \frac{1}{4+2zx} = \frac{z}{4z+2} + \frac{x}{4x+2} + \frac{y}{4y+2}$ $= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} \right)$	0,25
	Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$. Khi đó $a, b, c > 0$ và $abc = 1$ $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} = \frac{abc}{2a^3+abc} + \frac{abc}{2b^3+abc} + \frac{abc}{2c^3+abc}$ $= \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} = \frac{(bc)^2}{2ab.ca+(bc)^2} + \frac{(ca)^2}{2ab.bc+(ca)^2} + \frac{(ab)^2}{2bc.ca+(ab)^2}$	0,25
	$\geq \frac{(bc+ca+ab)^2}{2ab.ca+(bc)^2+2ab.bc+(ca)^2+2bc.ca+(ab)^2} = \frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc+ca+ab)^2} = 1$	0,25
	Suy ra $P \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$). Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là bằng $\frac{1}{2}$.	0,25

----- HẾT -----

* **Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như HDC quy định.