UBND HUYỆN KIM THÀNH
TRƯỜNG THCS CỘNG HÒA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN - LỚP 9
NĂM HỌC 2022 - 2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)$ với $x > 1; x \neq 2$

2) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+b+c-5}+\sqrt{5(ab+bc+ca)-abc}=0$

Tính giá trị của biểu thức: $B = a^5 + b^5 + c^5$

Câu 2 (3 điểm).

1) Giải phương trình: $x^2 - 20x + 24 + 8\sqrt{3(x-1)} = 0$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Câu 3 (2,0 điểm) .

1) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y = 4$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố

Câu 4 (3 điểm).

1) Cho tam giác nhọn ABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Trên các đoạn thẳng HA, HB, HC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BMC = CNA = APB = 90^0$

a) Chứng minh tam giác ANP cân.

b) Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác MBC, ABC và HBC. Chứng minh rằng: $S = \sqrt{S_1 S_2}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của góc BAH cắt BH ở D. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Gọi E là giao điểm của MD và AH. Chứng minh rằng: AD//CE.

Câu 5 (1,0 điểm).

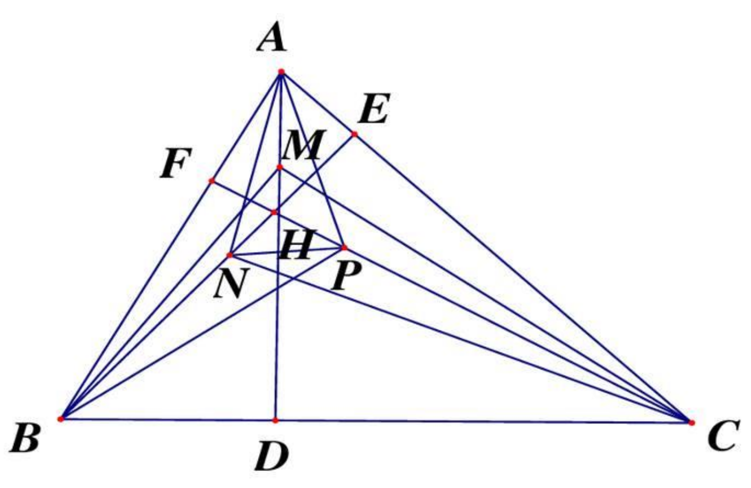
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \le 3$. Chứng minh rằng:
$\dfrac{ab}{a+3b+2c}+\dfrac{bc}{b+3c+2a}+\dfrac{ca}{c+3a+2b} \le \dfrac{1}{2}$

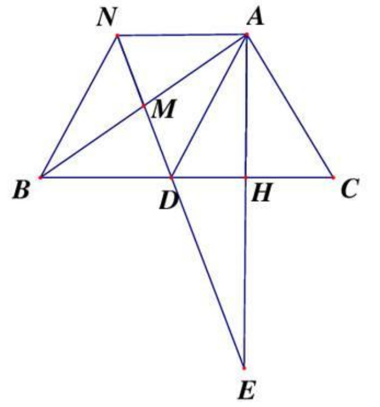
UBND HUYỆN …..
TRƯỜNG THCS…………….

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN - LỚP 9. NĂM HỌC 2022 - 2023
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	1	$M=\frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)$ $=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{(x-1)}}+\sqrt{x+2\sqrt{(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4x+4}}.\left(1-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$	0,25
		$=\frac{\lvert\sqrt{x-1}-1\rvert+\sqrt{x-1}+1}{\lvert x-2\rvert}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$	0,25
		$TH1: x>2$ $M=\frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		$TH2: 1<x<2$ $M=\frac{-\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}+1}{-(x-2)}.\left(\frac{x-2}{x-1}\right)=\frac{-2}{x-1}$	0,25
	2	$\sqrt{a+b+c-5}+\sqrt{5(ab+bc+ca)-abc}=0$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b+c-5=0(1) \\ 5(ab+bc+ca)-abc=0(2) \end{cases}$ Từ (1) => a + b + c = 5, thay vào (2) được: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$	0,25
		$\Leftrightarrow a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc=0$ $\Leftrightarrow (a^2b+a^2c+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+ac^2+abc)=0$ $\Leftrightarrow a(ab+ac+b^2+bc)+c(b^2+bc+ac+ab)=0$ $\Leftrightarrow a(a+b)(b+c)+c(a+b)(b+c)=0$ $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$ T/h1: a + b = 0 => c = 5 => B = $(-b)^5+b^5+5^5=5^5=3125$	0,25
		T/h2: b + c = 0 => a = 5 => B = 3125 T/h3: a + c = 0 => b = 5 => B = 3125	0,25
2		Điều kiện $x\ge 1$ PT $\Leftrightarrow \left(x^2-8x+16\right)-\left(12x-12-8\sqrt{3x-3}+4\right)=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=\left(2\sqrt{3x-3}-2\right)^2$	0.25

	1	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=2\sqrt{3x-3}-2 \\ x-4=2-2\sqrt{3x-3} \end{array}\right.$	
		$PT: x-4=2\sqrt{3x-3}-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 4(3x-3)=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2-16x+16=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x=8+4\sqrt{3}$	**0.25**
		$PT: x-4=2-2\sqrt{3x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ x^2-24x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=12-4\sqrt{6}$ Vậy…	**0.5**
	2	$\begin{cases} x^3-xy^2-(x-y+1)(x+y)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-y)(x+y)-(x-y+1)(x+y)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy-x+y-1)=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2-xy-x+y+1=0 \end{array}\right. \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x^2-xy-x+y-1=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} (2) \end{array}\right.$	**0.25**
		Giải hệ phương trình $(1): \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -2y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$	**0.25**
		Giải hệ phương trình $(2): \begin{cases} x^2-xy-x+y-1=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy-\left(2y^2-1\right)-1=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases}$	**0.25**

		$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)(x-2y)=0\\ x-y=2y^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y\\ x-y=2y^2-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=2y\\ x-y=2y^2-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=\frac{-1}{2}\end{cases}\end{array}\right.$ Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(x;y)=\left\{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right);(2;1);\left(-1;\frac{-1}{2}\right)\right\}$	**0.25**
3	**1**	$x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y = 4$ Biến đổi phương trình $(x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 3y - 4 = 0$	**0,25**
		$\Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = -(x+y)^2 \Leftrightarrow (y+4)(y-1) = -(x+y)^2$ mà $-(x+y)^2 \le 0 \Rightarrow (y+4)(y-1) \le 0 \Rightarrow -4 \le y \le 1$	**0,25**
		mà y € Z => y € {-4;-3;-2;-1;0;1}	**0,25**
		Các cặp số (x;y) t/m là (4;-4),(5;-3),(1;-3),(2;0),(-2;0),(-1;1)	**0,25**
	2	Do p là số nguyên tố => $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$ Đặt $x = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$, $y = 6p^2 + 1 \Rightarrow 4y = 25p^2 - (p-2)(p+2)$	**0,25**
		- Nếu p chia cho 5 dư 4 hoặc dư 1 thì (p-1)(p+1) chia hết cho 5 => x chia hết cho 5 mà x > 5 => x không là số nguyên tố	**0,25**
		- Nếu p chia cho 5 dư 3 hoặc dư 2 thì (p-2)(p+2) chia hết cho 5 => 4y chia hết cho 5 mà (4;5) = 1 => y chia hết cho 5 và y > 5 => y không là số nguyên tố	**0,25**
		Vậy p chia hết cho 5, mà p là số nguyên tố => p = 5 Thử vớip = 5 thì x = 101; y = 151 là các số nguyên tố	**0,25**
4	**1**		
		a) Xét tam giác ANC vuông tại N có NE là đường cao nên $AN^2 = AE.AC$ (1)	**0.25**
		Xét tam giác APB vuông tại P có PF là đường cao nên $AP^2 = AF.AB$ (2)	**0.25**

		CM: tam giác ABE đồng dạng với tam giác ACF (g-g) suy ra được: AC.AE = AB. AF (3)	**0.25**
		Từ (1), (2), (3) suy ra $AN^2=AP^2$ suy ra AN = AP suy ra tam giác ANP cân tại A	**0.25**
		b) Xét tam giác MBC vuông tại M có MD là đường cao nên $MD^2 = BD.DC$ (4)	**0.25**
		CM: tam giác BHD đồng dạng tam giác ACD suy ra: $\frac{DB}{DA}=\frac{HD}{CD}\Rightarrow DB.CD = AD.HD$ (5) Từ (4) và (5) suy ra $MD^2 = AD.HD$	**0.25**
		Ta có: $S=\frac{1}{2}BC.MD$; $S_1=\frac{1}{2}BC.AD$; $S_2=\frac{1}{2}BC.HD$ Suy ra $S_1.S_2=\frac{1}{2}BC.AD.\frac{1}{2}BC.HD=\frac{1}{4}BC^2.AD.HD=\frac{1}{4}BC^2.MD^2.$	**0.25**
		Suy ra $\sqrt{S_1.S_2}=\frac{1}{2}BC.MD=S$	**0.25**
	2		
		Gọi N là điểm đối xứng của D qua M Khi đó ADBN là hình bình hành suy ra BD = AN, DH//NA Xét tam giác EAN có: DH//AN nên $\frac{HE}{AE}=\frac{DH}{AN}$	**0.25**
		Xét tam giác ABH, AD là phân giác suy ra $\frac{AH}{AB}=\frac{DH}{BD}$ CM: Tam giác HAB đồng dạng HCA suy ra: $\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{AC}$	**0.25**
		CM tam giác CAD cân tại C suy ra CA = CD $\frac{HE}{AE}=\frac{DH}{AN}=\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{AC}=\frac{CH}{CD}\Rightarrow\frac{HE}{AE-HE}=\frac{CH}{CD-CH}\Rightarrow\frac{HE}{AH}=\frac{CH}{HD}$	**0.25**
		Suy ra tam giác HEC đồng dạng tam giác HAD $\Rightarrow HEC = HAD \Rightarrow AD//CE$	**0.25**
		Chứng minh bất đẳng thức phụ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ (*)Với x, y là các số dương. Dấu "=" khi x = y	**0,25**

		Tacó áp dụng BĐT (*) $\frac{ab}{a+3b+2c}=\frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b}\le\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)$ $=\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right)(1)$ $\frac{bc}{2a+b+3c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{b}{2}\right)\qquad(2)$ $\frac{ac}{3a+2b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{c}{2}\right)\qquad(3)$	**0,25**
		Từ (1) (2) (3) $P\le\frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{a+b+c}{6}$ Mặt khác chứng minh được: $\left(a+b+c\right)^2\le3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ $\Leftrightarrow a+b+c\le\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le3$	**0,25**
		Do đó $P\le\frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b = c = 1.	**0,25**