

Câu 1: (3,0 điểm)

Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

1. Rút gọn M
2. Tìm giá trị của a để biểu thức M đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24.
2. Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là một số chính phương.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau: $|x-1|(x^2+3x-7) = x^3-1$.
2. Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7, chia cho $(x+2)$ dư 1.

Câu 4. (7,0 điểm)

1. Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy C khác A . Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt By tại D .

- a. Chứng minh rằng: $AB^2 = 4AC \cdot BD$.
- b. Kẻ OM vuông góc với CD tại M và gọi K là trung điểm của CD . Chứng minh $\triangle KOD$ cân tại K , từ đó suy ra $DB = DM$.
- c. Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Hai đường phân giác trong BD và CE cắt nhau tại O .

Chứng minh rằng $\frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} = 2$.

Câu 5. (3,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geq \frac{3}{5}.$$

2. Hình vuông có 3×3 ô chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo bằng nhau được gọi là hình vuông kỳ diệu. Chứng minh rằng số ở tâm của một hình vuông kỳ diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

=====Hết=====

Họ và tên thí sinh: Số báo danh