

Bài 1 (4 điểm).

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{x-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x > 0$; $x \neq 4$

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị biểu thức A biết:

$$x = (n^{11} + n^{10} - n^9 + 1)^{2022} + \frac{(n^2+n-4)^{2022}}{n^{15}+n^{14}-n^{13}+3^{2022}} \text{ khi } n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Bài 2 (4 điểm)

1. Giải phương trình:

$$\frac{x^2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} + \frac{1}{8 - 4\sqrt{4 - x^2}} = 1$$

2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 1$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+4a} + \frac{1}{3+9b} + \frac{1}{6+36c} \geq \frac{1}{2}$$

Bài 3 (5 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn: $5x^2 + 2y^2 \leq 2xy + 4x + 2y$
2. Tìm tất cả số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $(a^4 + b^4 + c^4)$ chia hết cho p.

Bài 4 (6 điểm)

Cho hình vuông MNPQ. Gọi A là điểm bất kì trên cạnh PQ (điểm A không trùng với hai điểm P, Q). Đường thẳng MA cắt đường thẳng NP tại điểm B. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với MA, cắt đường thẳng PQ tại C.

1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$ không đổi.
2. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của Q trên MA, MC. F là trung điểm AC. I là giao điểm của MF và DE. Chứng minh rằng: $\frac{1}{MI} = \frac{1}{QA} + \frac{1}{QC}$.
3. Chứng minh rằng: $\cos \angle ACM = \sin \angle ACB \cdot \cos \angle ABC + \sin \angle ABC \cdot \cos \angle ACB$

Bài 5 (1 điểm)

Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1 lấy n điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có đỉnh là đỉnh của hình vuông hoặc n điểm đó sao cho diện tích S của nó thỏa mãn bất đẳng thức: $S \leq \frac{1}{2(n+1)}$.