

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I. (5,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^2 + x - 1 = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x^2-1}$.
- 2) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $a + b = 2c$ và $2ab = ac + bc$. Chứng minh: $a = b = c$.

Bài II. (5,0 điểm)

- 1) Chứng minh với mọi số tự nhiên n lẻ, giá trị của biểu thức $T = n^3 + 3n^2 - n - 3$ luôn chia hết cho 48.
- 2) Tìm các số nguyên x, y thoả mãn $x(x^2 - y) = 5 - 2y$.

Bài III. (2,0 điểm)

Với a, b là các số thực không âm và thoả mãn $a + b = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt{a}(b+1) + \sqrt{b}(a+1)$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$), M là trung điểm của BC . Gọi E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M lên AC, AB (E thuộc AC ; F thuộc AB). Đường thẳng qua C và vuông góc với BC , cắt ME tại P ; đường thẳng qua B vuông góc với BC , cắt MF tại Q .

- 1) Chứng minh $ME \cdot MP = MF \cdot MQ$; và $\widehat{MFE} = \widehat{MPQ}$.
- 2) Hai đường thẳng FM và AC cắt nhau tại S . Chứng minh tam giác SEF đồng dạng với tam giác SMA ; và AM vuông góc với PQ .
- 3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh ba điểm P, H, Q thẳng hàng.

Bài V. (2,0 điểm)

- 1) Cho a, b, x, y là các số nguyên dương thoả mãn a, b nguyên tố cùng nhau và $\frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{xy}{b}$.

Chứng minh $a + 2b$ là số chính phương.

- 2) Trong khu rừng trên đảo có một đàn gồm 2021 con kì nhông màu xanh, 2022 con kì nhông màu đỏ, 2023 con kì nhông màu vàng sinh sống. Để lẫn trốn và săn mồi, loài kì nhông này biến đổi màu như sau: nếu hai con khác màu gặp nhau thì chúng cùng đổi sang màu thứ ba; nếu hai con cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên màu. Hỏi có khả năng nào để tất cả các con kì nhông trở thành cùng một màu được không? Vì sao?

-----HẾT-----

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh : Số báo danh :