

Bài I. (5,0 điểm) Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

- 1) Tìm điều kiện xác định của M.
- 2) Rút gọn biểu thức M.
- 3) Tìm x để $M \geq -3$.

Bài II. (5,0 điểm)

- 1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^5 + x - 1$
- 2) Giải phương trình $8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2$
- 3) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 + x^2y = x^2 + 3x + 3y - 2$

Bài III. (3,0 điểm)

- 1) Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi số dương x, y.
- 2) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2022$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{c+2022} + \frac{bc}{a+2022} + \frac{ca}{b+2022}$

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P.

- 1) Chứng minh $\triangle AKC$ đồng dạng $\triangle BPC$.
- 2) Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh $\frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$
- 3) Tia AQ cắt BC tại I. Chứng minh: $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$

Bài V. (1,0 điểm)

Có 5 điểm nằm trong một hình vuông cạnh $a = 36,7$ (đơn vị dài). Chứng minh rằng tồn tại một điểm nằm trong hình vuông mà khoảng cách từ điểm đó đến 5 điểm nói trên đều lớn hơn 10.