

Bài 1.(3 điểm)

a. Tính $(\sqrt{11} - \sqrt{3}) \left(\sqrt{13 - \sqrt{6}} + 2\sqrt{30 - \sqrt{54}} + \sqrt{11} - \sqrt{10 - \sqrt{6}} \right)$

b. Giải phương trình: $2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-2} - \sqrt{(x-1)(x-2)} - 6 = 0$

Bài 2.(3 điểm) Cho biểu thức $M = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0; x \neq 1$

a. Rút gọn biểu thức M

b. Xét biểu thức $N = \frac{2\sqrt{x}}{M}$, chứng tỏ $0 < N < 2$.

Bài 3.(4 điểm)

a. Cho hai số x, y khác 0. Chứng minh: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$

b. Cho 3 số x, y, z thỏa $x \geq 3, y \geq 5, z \geq 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Bài 4.(2 điểm) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ac} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{a + b + c}{2abc}$$

Bài 5.(2 điểm) Cho hình vuông ABCD có AB = a, P và Q lần lượt là thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\widehat{PCQ} = 45^\circ$. Chứng minh rằng chu vi $\Delta APQ = 2a$.

Bài 6.(4 điểm) Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH, phân giác AD. Trên AC lấy E sao cho AE = AB, BE cắt AH tại I.

a. Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{IB^2}{IE^2}$

b. Cho DB = 15cm, DC = 20cm. Tính chu vi và diện tích của tứ giác AEDI.

Bài 7.(2 điểm) Cho ΔABC cân tại A (Â nhọn), H là trực tâm. Gọi E là trung điểm của AC. Lấy D trên BC sao cho $BC = 3 \cdot CD$. Chứng minh $BE \perp HD$.