|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC**   |  | | --- | | **ĐỀ CHÍNH THỨC** | | **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020 – 2021**  **ĐỀ THI MÔN: TOÁN**  **Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin**  *Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề* |

**Câu 1 (4,0 điểm).**

a) Giải phương trình 

b) Giải phương trình 

c) Giải hệ phương trình 

**Câu 2 (1,5 điểm).**

a) Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho  cũng là số nguyên tố.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa mãn .

Cho biết kí hiệu  là tích các số tự nhiên từ  đến .

**Câu 3 (1,0 điểm).**

Cho các số dương . Chứng minh rằng



**Câu 4 (3,0 điểm).**

Cho tam giác nhọn  có  và nội tiếp đường tròn  Gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  tia  cắt đường tròn  tại điểm  (khác ). Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm  (khác ) và cắt cạnh  tại điểm .

a) Chứng minh rằng tam giác  cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

b) Chứng minh 

c) Gọi các điểm  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên các cạnh . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với  qua  Biết rằng  chứng minh 

**Câu 5 (0,5 điểm).**

Thầy Du viết số  thành tổng của các số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số  hoặc  được không? Tại sao?

**-------------HẾT-------------**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC**   |  | | --- | | **ĐỀ CHÍNH THỨC** | | **KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2020 – 2021**  **HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN**  **Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin**  **————————** |

|  |
| --- |
| Câu 1 (4*,0 điểm).*   1. Giải phương trình 2. Giải phương trình 3. Giải hệ phương trình |

**Lời giải**

a) Điều kiện xác định: 

Phương trình: 









Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

b)Điều kiện xác định  (1)

+) Nhận xét: không là nghiệm của phương trình.

+) Với : Khi đó phương trình viết được thành



Đặt , thay vào phương trình trên ta được:



Với  ta có:  vô nghiệm do .

Với  ta có: , ta có  suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt 

So sánh với điều kiện (1) ta được phương trình có hai nghiệm 

c)Điều kiện .

 







Vậy hệ có hai nghiệm  là 

|  |
| --- |
| Câu 2 (1,5 điểm).   1. Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho  là số nguyên tố. 2. Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa mãn .   Cho biết kí hiệu  là tích các số tự nhiên từ  đến . |

**Lời giải**

a) Nếu  thì  là số nguyên tố suy ra  thỏa mãn.

Nếu  thì , kết hợp với  suy ra  không là số nguyên tố.

Nếu  thì , kết hợp với  suy ra  không là số nguyên tố.

b)Giả sử , kết hợp với giả thiết ta được .

+) Nếu 

 vô lí.\*) Nếu  thì 

+) Nếu  thì từ phương trình trên ta được:



Từ phương trình này ta được: 

Với , ta được phương trình 

+ Nếu  vô lí.

+ Nếu  vô lí.

+) Nếu  thì từ phương trình đã cho ta được:



Vậy 

|  |
| --- |
| Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số dương . Chứng minh rằng |

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:





Ta sẽ chứng minh 





 (luôn đúng). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi 

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

|  |
| --- |
| Câu 4 (3,0 điểm).Cho tam giác nhọn  có  và nội tiếp đường tròn . Gọi điểm  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác , tia  cắt đường tròn  tại điểm  (khác điểm ). Đường thẳng  cắt đường tròn  tại điểm  (khác ) và cắt cạnh  tại điểm .  a) Chứng minh rằng tam giác  cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  b) Chứng minh  c) Gọi các điểm  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên các cạnh . Gọi  lần lượt là các điểm đối xứng với  qua . Biết rằng , chứng minh |

**Lời giải**



a)Chứng minh rằng tam giác  cân. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

Ta có  (1) (do *AI*, *BI* lần lượt là phân giác các góc *BAC*, *ABC* và tứ giác *ABDC* nội tiếp đường tròn).

Mặt khác  (do *AI, BI* tương ứng là phân giác góc *BAC, ABC*) (2).

Từ (1) và (2) ta được  Tam giác *DBI* cân tại *D*.

Do tam giác *DBI* và *DCI* cân tại *D* nên là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IBC*.

b) Theo kết quả phần a ta có tam giác *DIC* cân tại *D* nên 

Do *OD* là trung trực của *BC* suy ra *F* là trung điểm của *BC*. Do *DE* là đường kính của đường tròn *(O)* suy ra .

Kết hợp với *CF* là đường cao của tam giác *DCE* nên 

Xét hai tam giác *DIF* và *DEI* có:

 và  suy ra tam giác *DIF* đồng dạng với tam giác *DEI*

Suy ra .

c) Áp dụng định lí Ptoleme cho tứ giác *ABDC* ta được:





Gọi *P* là trung điểm của đoạn thẳng *AI*, suy ra  là trung điểm của *PD*. Mặt khác *I* là trung điểm *HM* suy ra tứ giác *MPHD* là hình bình hành.

Từ đó suy ra *DH = MP = DI* (5).

Chứng minh tương tự ta được *DK = DI* (6).

Mặt khác theo kết quả phần a ta được *DB = DC = DI* (7).

Từ (5), (6), (7) ta được *DB = DC = DH = DK = DI*  suy ra *B, C, H, K, I* cùng thuộc đường tròn tâm .

Do *B, C, H, K, I* cùng thuộc đường tròn tâm  nên sđ, sđ.

Do sđ sđ

Từ đó suy ra .

|  |
| --- |
| Câu 5 (0,5 điểm). Thầy Du viết số  thành tổng của một vài số nguyên dương rồi đem cộng tất cả các chữ số của các số nguyên dương này với nhau. Hỏi thầy Du có thể nhận được kết quả là số  hoặc  được không? Tại sao? |

**Lời giải**

**Nhận xét.** Cho số nguyên dương , kí hiệu  là tổng các chữ số của . Khi đó .

Chứng minh. Giả sử 

.

Ta có 

Do 

Mặt khác 

Từ đó suy ra , .

Do đó thầy Du không nhận được kết quả là 2021 và 2022.

**-----------------HẾT-----------------**